

Урок 5. Властивості показникової функції

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

з'ясуєте, що означає неперервність показникової функції, та обґрунтуєте її неперервність на всій області визначення;

побудуєте графік показникової функції та з'ясуєте його поведінку, за властивостями функції;

інтерпретуєте показникову функцію як математичну модель реальних процесів;

складете математичну модель процесу, описаного умовою задачі, за допомогою показникової функції;

зробите висновки щодо переваг використання показникових моделей у природничих і соціальних науках.

II. Повторення

1. Укажіть множину значень функції $y = (1,6)^x - 2$.
2. Знайдіть область визначення функції $y = 2^{\sqrt{2x-1}}$.
3. Знайдіть множину значень функції $y = 6^{|x|}$.
4. Спростіть вираз $\left(\frac{1}{b}\right)^{\sqrt{3}-2} \cdot b^{\sqrt{3}}$.
5. Укажіть функцію, яка є спадною на всій області визначення.

А	Б	В	Г	Д
$y = \left(\frac{3}{8}\right)^{-x}$	$y = 0,2^x$	$y = \left(\frac{5}{3}\right)^x$	$y = 1,2^x$	$y = x^2 - 1$

III. Неперервність показникової функції

Розглянемо значення показникових функцій $y = 2^x$ і $y = (0,5)^x$ при достатньо малих за модулем значеннях аргументу.

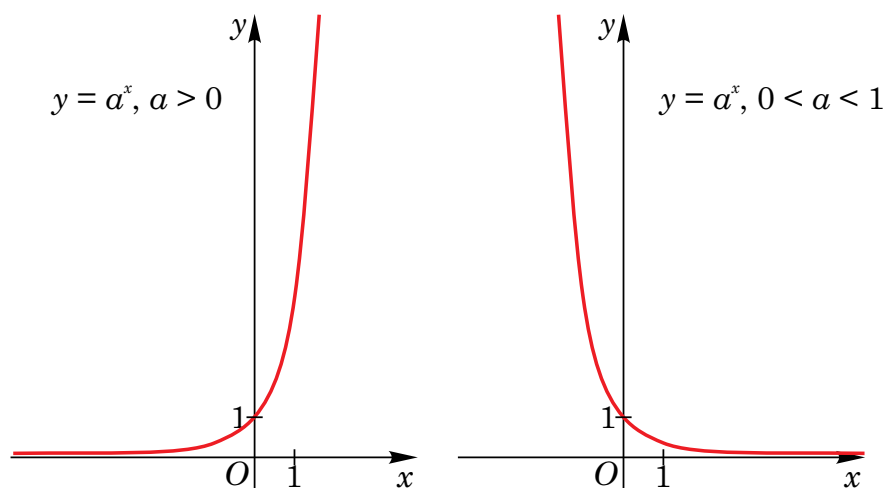
x	1	0,5	0,1	0,01	0,001	-0,1	-0,01	-0,001
2^x	2	1,41	1,07	1,007	1,0007	0,933	0,993	0,9993
$(0,5)^x$	0,5	0,707	0,933	0,993	0,9993	1,07	1,007	1,0007

Аналізуючи значення, наведені у цій таблиці, можна припустити, що для довільних $a > 0$ справджується співвідношення $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1 = a^0$, тобто в точці $x = 0$ показникова функція неперервна. Беручи до уваги цей висновок, доведемо, що наближеній рівності $a^x = a^{x_0}$ можна забезпечити довільну наперед задану точність для всіх значень x з деякого достатньо малого околу точки x_0 , тобто, що показникова функція неперервна в довільній точці x_0 своєї області визначення. Оціним різницю $a^x - a^{x_0} = a^{x_0} (a^{x-x_0} - 1)$. Оскільки $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$, то наближеній рівності $a^{x-x_0} \approx 1$ можна забезпечити будь-яку точність, якщо точку x брати з достатньо малого околу точки x_0 . Оскільки a^{x_0} — фіксоване число, то і наближеній рівності $a^x - a^{x_0} \approx 0$ можна забезпечити будь-яку точність, якщо точку x брати з достатньо малого околу точки x_0 . А це означає, що $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$, тобто функція $y = a^x$ неперервна в точці x_0 .

Таким чином узагальнимо властивості показникової функції:

IV. Диференційовність показникової функції

Детальніше про похідну показникової функції ви дізнаєтесь на уроках наступних тем. Розглянемо схематичні зображення графіків показникової функції для випадків $a > 0$ і $0 < a < 1$ відповідно.



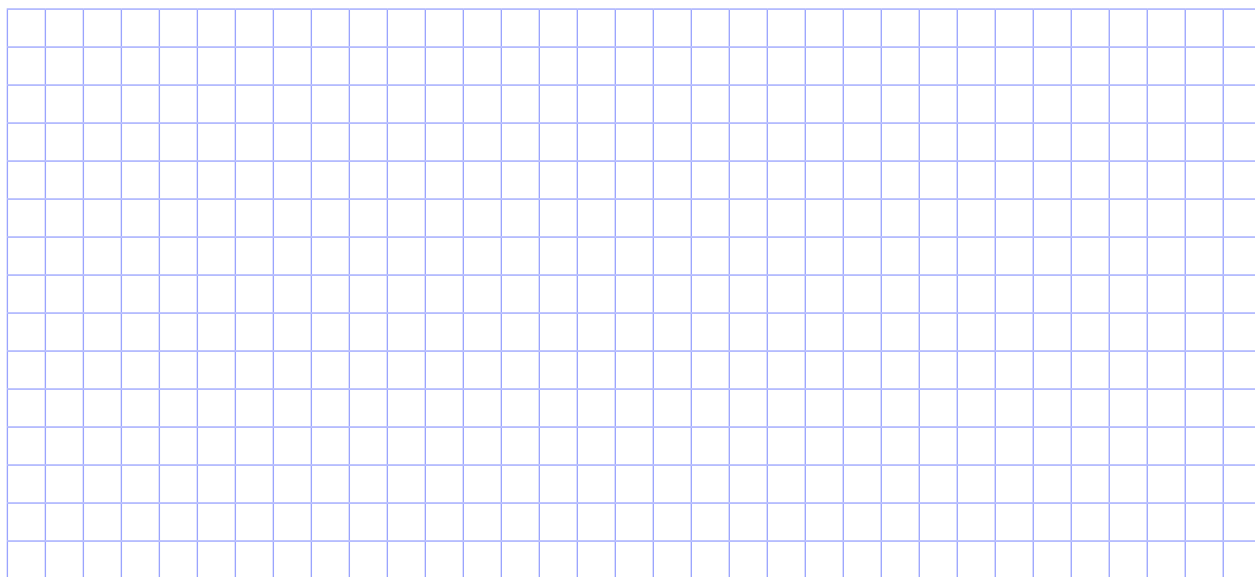
Для показникових функцій неважко довести такі твердження: якщо $a > 1$, то $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$; якщо $0 < a < 1$, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$. Тому при $a > 1$ графік показникової функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \rightarrow -\infty$. Аналогічно при $0 < a < 1$ графік показникової функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$, якщо $x \rightarrow +\infty$.

Таким чином узагальнимо властивості показникової функції:

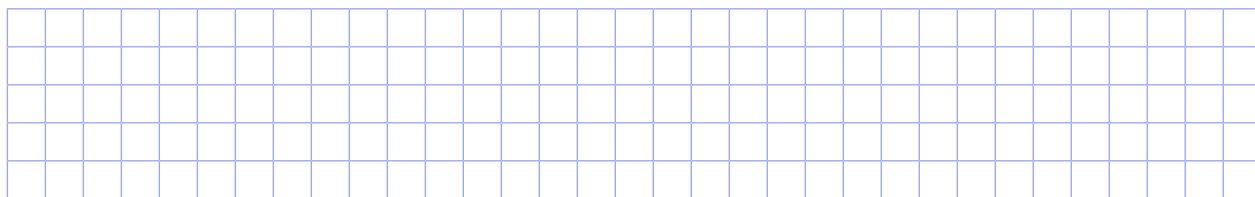
Область визначення	R .
Область значень	$(0; +\infty)$.
Нулі функції	Немає.
Проміжки знакосталості	$y > 0$.
Зростання/спадання	Якщо $a > 1$, то функція є зростаючою, якщо $0 < a < 1$, то функція є спадною.
Неперервність	Неперервна.
Диференційовність	Диференційовна.
Асимптоти	Якщо $a > 1$, то графік функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \rightarrow -\infty$; якщо $0 < a < 1$, то графік функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \rightarrow +\infty$.

Приклад 1. Дано функцію $f(x) = 2^x - 2$.

- 1) Укажіть її область визначення і множину значень.
- 2) Чи проходить графік цієї функції через точку $A(3; 6)$?
- 3) Побудуйте графік функції $f(x)$.
- 4) Знайдіть точки перетину графіка функції з осями координат.
- 5) Скільки коренів має рівняння $f(x) = -x^2$?



Приклад 2. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $f(x) = 3^x$ на відрізку $[-4; 3]$.



V. Показникова функція як математична модель

Раніше було розглянуто, що функції можна означати, описуючи їхні характеристичні властивості. Наприклад, усі показникові функції $f(x) = a^x$ мають таку властивість: $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, де $x, y \in R$, тобто властивість $f(x+y) = f(x)f(y)$, де $x, y \in R$.

Показникова функція є математичною моделлю багатьох процесів, які відбуваються в природі та в діяльності людини.

Нехай маса колоній бактерій. момент часу $t = x$ дорівнює $f(x)$. Тоді за проміжок від $t = x$ до $t = x + y$ маса колонії бактерій збільшиться в таку саму кількість разів, як за проміжок часу від $t = 0$ до $t = y$, тобто $\frac{f(x+y)}{f(x)} = \frac{f(y)}{f(0)}$.

Природно вважати, що функція, яка описує залежність маси бактерій колонії від часу, є неперервною.

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $(\sqrt{2}-1)^{|x|} = \sin^2 x + 1$.

[illegible]

Задача. Задача Н. Шуке. Резервуар має отвір, через який за кожну одиницю часу витікає $\frac{1}{10}$ частина тієї кількості води, що містилась на початку відліку одиниці часу.

- 14

- $$1) \ y = 3^x + 1; \quad 2) \ y = -5^x; \quad 3) \ y = 7^x - 2; \quad 4) \ y = -\left(\frac{1}{6}\right)^x.$$

1. Знайдіть множину значень функції:

- $$1) \ y = -9^x; \quad 2) \ y = \left(\frac{1}{5}\right)^x + 1; \quad 3) \ y = 7^x - 4; \quad 4) \ y = 6^{|x|}.$$

7. Побудуйте графік функції:

1) $y = 3^x$;

2) $y = 0,5^x$;

3) $y = 3^{-x}$;

4) $y = -2^x$;

5) $y = 2^{2x}$;

6) $y = -2^{-2x}$.

8. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $3^x = 4 - x$;

2) $4^x + x = 5$;

3) $2^{x+2} = 3x + 5$;

4) $0,5^x = \sqrt{x+5}$;

5) $e^x = \sqrt{1-x}$;

6) $\pi^x + x^{0,5} = 1$.

Рівень С

1. Дослідіть на неперервність та з'ясуйте характер точок розриву функції:

1) $y = 2^{\frac{1}{x}}$;

2) $y = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\operatorname{tg}^2 x}$.

2. Дослідіть на неперервність та з'ясуйте характер точок розриву функції:

1) $y = 5^{\frac{1}{(x-1)^2}}$;

2) $y = \left(\frac{\pi}{8}\right)^{\operatorname{ctg} x}$.

3. Знайдіть область значень функції $y = \frac{2^x - 1}{2^x - 4}$.

4. Знайдіть область значень функції $y = \frac{3^x}{3^x - 9}$.

5. Дано функцію $y = f(x)$, де $f(x) = 5^x + \frac{25}{5^x}$. При якому значенні параметра a функція $y = f(x + a)$ буде парною?

6. Дано функцію $y = f(x)$, де $f(x) = 3^x - \frac{27}{3^x}$. При якому значенні параметра a функція $y = f(x + a)$ буде непарною?

7. При яких значеннях параметра a найбільше значення функції

$$f(x) = -\left(\frac{1}{9}\right)^x + \frac{7}{2} \cdot 3^{-x} - 3a^2$$

на відрізку $[-1; 0]$ є від'ємним числом?

8. При яких значеннях параметра a функція

$$f(x) = 4^{-x} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \cdot \frac{5a}{2} + \frac{a^2 + 12}{6}$$

набуває у всіх точках відрізка $[-1; 1]$ значень, більших за 2?

Рефлексія

Сьогодні я зрозумів/зрозуміла, що показникова функція використовується для опи-
су процесів, у яких

.....
.....

Мене здивувало, що
.....
.....

Найскладнішим для мене було
.....
.....

Поради собі до наступного уроку
.....
.....







