

Урок 5. Властивості показникової функції

План уроку

1. Неперервність показникової функції.
2. Диференційованість показникової функції.
3. Показникова функція як математична модель процесу.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

досліджує специфічну проблемну ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела [12 МАО 1.2.1–1 П];

оцінює повноту і достовірність інформації [12 МАО 1.2.1–3 П];

обирає математичну модель розв'язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов [12 МАО 3.2.2–1 П];

робить висновки щодо застосування математичних понять і фактів [12 МАО 4.1.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте для учнів/учениць мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям (на ваш вибір) завдання на повторення раніше вивченого матеріалу.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Її розв'язання пропонується організувати у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) Ілюстративні приклади обирайте на власний розсуд.
- 5) Обов'язково організуйте розв'язання практичної задачі, об'єднавши учнів/учениць у кілька груп. Під час групової роботи важливо формувати комунікаційні навички, інтегрувати здобуті знання у практичну діяльність.
- 6) Запропонуйте учням/ученицям індивідуально або в групах розв'язувати тренувальні завдання трьох рівнів складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язування прикладів і задач, а також уміння самостійної роботи.

7) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте їм обрати теми для індивідуальних або групових проєктів. Створення та захист проєктів можуть бути альтернативою контрольній роботі.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Як можна виміряти швидкість зростання процесу в будь-який момент часу?
- 2) Які реальні явища з життя можна описати показниковою функцією?
- 3) Як математична модель допомагає передбачати майбутнє процесу, а не лише описувати його у певний момент часу?
- 4) Чому для моделювання природних процесів важливо, щоб функція була неперервною?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Укажіть множину значень функції $y = (1,6)^x - 2$.
Відповідь. $(-2; +\infty)$.
2. Знайдіть область визначення функції $y = 2^{\sqrt{2x-1}}$.
Відповідь. $[0,5; +\infty)$.
3. Знайдіть множину значень функції $y = 6^{|x|}$.
Відповідь. $[1; +\infty)$.
4. Спростіть вираз $\left(\frac{1}{b}\right)^{\sqrt{3}-2} \cdot b^{\sqrt{3}}$.
Відповідь. b^2 .
5. Укажіть функцію, яка є спадною на всій області визначення.

А	Б	В	Г	Д
$y = \left(\frac{3}{8}\right)^{-x}$	$y = 0,2^x$	$y = \left(\frac{5}{3}\right)^x$	$y = 1,2^x$	$y = x^2 - 1$

Відповідь. Б.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Задача Н. Шуке. Резервуар має отвір, через який за кожну одиницю часу витікає $\frac{1}{10}$ частина тієї кількості води, що містилась на початку відліку одиниці часу.

- 1) Яка частина води в резервуарі залишиться через 5 одиниць часу; через $7\frac{1}{3}$ одиниць часу?

- 2) Запишіть функцію, яка моделює процес зменшення кількості води в резервуарі. Побудуйте графік цієї функції.
- 3) За який час резервуар спорожніє наполовину?

Історична довідка

Ніколя Шукє (Шюке) (фр. *Nicolas Chuquet*) був французьким математиком кінця середньовіччя, який зробив важливі внески в розвиток алгебри та числових систем. Він винайшов власну систему позначень для алгебричних виразів і степенів чисел. Він, можливо, був першим математиком, який визнав нуль і від'ємні числа як показники степеня. У своєму трактаті він описав і впорядкував назви великих чисел — такі як *million*, *billion*, *trillion* і т. ін. — у системі, що пізніше стала відома як довга шкала чисел (long scale). Ця система дала основу для сучасних назв великих чисел у Франції, а потім і в Європі. Хоча трактат Шукє *Triparty en la science des nombres* («Тричастина наук про числа») не був надрукований за його життя, копії його праці вплинули на розвиток алгебри й числових систем у наступних століттях.

III. Неперервність показникової функції

Розглянемо значення показникових функцій $y = 2^x$ і $y = (0,5)^x$ при достатньо малих за модулем значеннях аргументу.

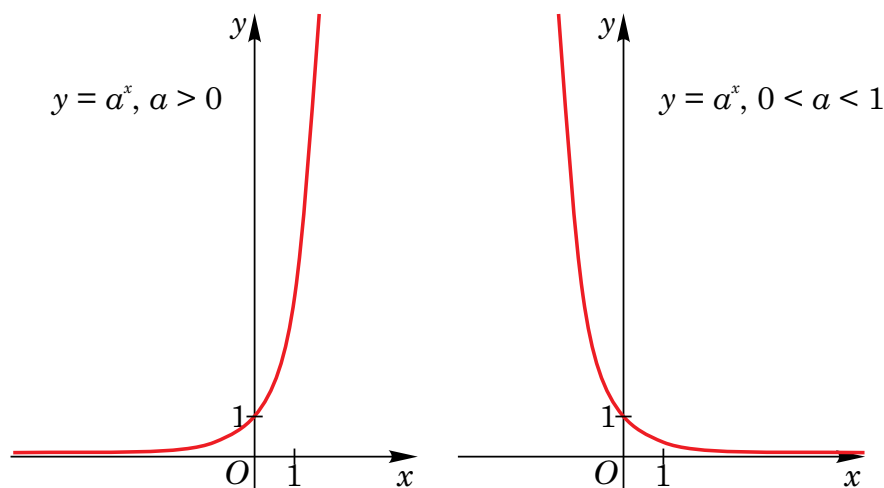
x	1	0,5	0,1	0,01	0,001	−0,1	−0,01	−0,001
2^x	2	1,41	1,07	1,007	1,0007	0,933	0,993	0,9993
$(0,5)^x$	0,5	0,707	0,933	0,993	0,9993	1,07	1,007	1,0007

Аналізуючи значення, наведені у цій таблиці, можна припустити, що для довільних $a > 0$ справджується співвідношення $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1 = a^0$, тобто в точці $x = 0$ показникова функція неперервна. Беручи до уваги цей висновок, доведемо, що наближеній рівності $a^x = a^{x_0}$ можна забезпечити довільну наперед задану точність для всіх значень x з деякого достатньо малого околу точки x_0 , тобто, що показникова функція неперервна в довільній точці x_0 своєї області визначення. Оціним різницю $a^x - a^{x_0} = a^{x_0} (a^{x-x_0} - 1)$. Оскільки $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$, то наближеній рівності $a^{x-x_0} \approx 1$ можна забезпечити будь-яку точність, якщо точку x брати з достатньо малого околу точки x_0 . Оскільки a^{x_0} — фіксоване число, то і наближеній рівності $a^x - a^{x_0} \approx 0$ можна забезпечити будь-яку точність, якщо точку x брати з достатньо малого околу точки x_0 . А це означає, що $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = a^{x_0}$, тобто функція $y = a^x$ неперервна в точці x_0 .

Таким чином узагальнимо властивості показникової функції:

IV. Диференційовність показникової функції

Детальніше про похідну показникової функції ви дізнаєтесь на уроках наступних тем. Розглянемо схематичні зображення графіків показникової функції для випадків $a > 0$ і $0 < a < 1$ відповідно.



Для показникових функцій неважко довести такі твердження: якщо $a > 1$, то $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$; якщо $0 < a < 1$, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$. Тому при $a > 1$ графік показникової функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \rightarrow -\infty$. Аналогічно при $0 < a < 1$ графік показникової функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$, якщо $x \rightarrow +\infty$.

Таким чином узагальнимо властивості показникової функції:

Область визначення	$\mathbb{R}$.
Область значень	$(0; +\infty)$.
Нулі функції	Немає.
Проміжки знакосталості	$y > 0$.
Зростання/спадання	Якщо $a > 1$, то функція є зростаючою, якщо $0 < a < 1$, то функція є спадною.
Неперервність	Неперервна.
Диференційовність	Диференційовна.
Асимптоти	Якщо $a > 1$, то графік функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \rightarrow -\infty$; якщо $0 < a < 1$, то графік функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \rightarrow +\infty$.

Ілюстративні приклади

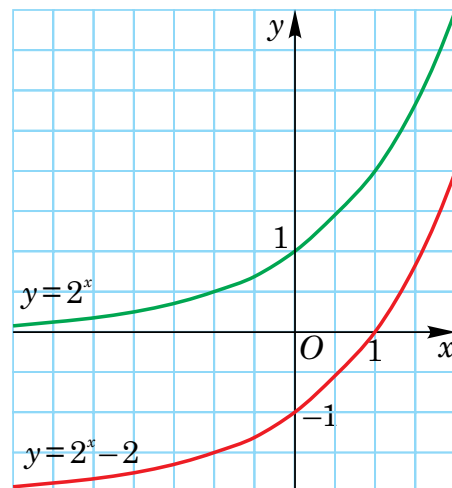
6. Дано функцію $f(x) = 2^x - 2$.

- 1) Укажіть її область визначення і множину значень.
- 2) Чи проходить графік цієї функції через точку $A(3; 6)$?
- 3) Побудуйте графік функції $f(x)$.
- 4) Знайдіть точки перетину графіка функції з осями координат.
- 5) Скільки коренів має рівняння $f(x) = -x^2$?

Розв'язання. 1) Функція $f(x) = 2^x - 2$ визначена на всій координатній осі, тобто її область визначення є множина $(-\infty; +\infty)$. Оскільки множиною значень функції $y = 2^x$ є проміжок $(0; +\infty)$, тобто $0 < 2^x < +\infty$, або $-2 < 2^x - 2 < +\infty$, то множиною значень даної функції є проміжок $(-2; +\infty)$.

2) Щоб перевірити, чи проходить графік функції через точку знайдемо значення функції в точці $x = 3$. Отже, $f(3) = 2^3 - 2 = 6$, тому графік функції проходить через точку $(3; 6)$.

3) Графік даної функції можна побудувати із графіка функції $y = 2^x$ паралельним перенесенням останнього на 2 одиниці у від'ємному напрямі осі ординат (див. рисунок).



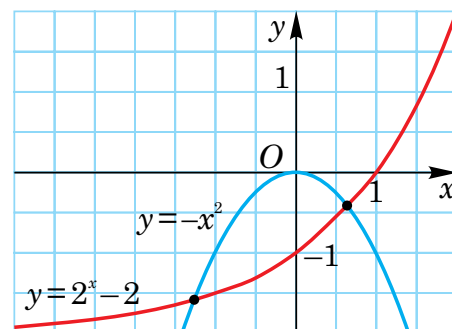
4) Щоб знайти точку перетину графіка з віссю y , знайдемо значення функції при $x = 0$: $f(0) = 2^0 - 1 = 1 - 2 = -1$. Отже, графік функції перетинає вісь y у точці $(0; -1)$. щоб знайти точку перетину графіка з віссю x , знайдемо, при яких значеннях x функція набуває значення 0: $0 = 2^x - 2$, $2^x = 2$, $x = 1$. Отже, графік функції перетинає вісь x у точці $(1; 0)$.

5) Для відповіді на запитання потрібно встановити, у скількох точках перетинаються графіки функцій $y = 2^x - 2$ і $y = -x^2$. Парабола $y = -x^2$ перетинає графік даної функції у двох точках.

Отже, рівняння має два корені.

Відповідь. 1) $(-\infty; +\infty)$; $(-2; +\infty)$; 2) проходить;

4) $(1; 0)$; 5) два корені.



7. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $f(x) = 3^x$ на відрізку $[-4; 3]$.

Розв'язання. Оскільки функція $f(x)$ зростає на відрізку $[-4; 3]$, то найменшого значення вона набуває при $x = -4$, а найбільшого – при $x = 3$. Тоді:

$$\min_{[-4;3]} f(x) = f(-4) = 3^{-4} = \frac{1}{81}; \quad \max_{[-4;3]} f(x) = f(3) = 3^3 = 27.$$

Відповідь. $\frac{1}{81}$; 27.

V. Показникова функція як математична модель

Раніше було розглянуто, що функції можна означати, описуючи їхні характеристичні властивості. Наприклад, усі показникові функції $f(x) = a^x$ мають таку властивість: $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, де $x, y \in \mathbb{R}$, тобто властивість $f(x+y) = f(x)f(y)$, де $x, y \in \mathbb{R}$.

Останню рівність називають функціональним рівнянням Коші. Можна довести, що серед неперервних функцій, відмінних від нульової константи, записане рівняння задовольняють лише функції виду $f(x) = a^x$. Тому рівняння Коші можна використовувати для означення показникової функції.

Показникова функція є математичною моделлю багатьох процесів, які відбуваються в природі та в діяльності людини.

Наприклад, біологам відомо, що колонія бактерій у певних умовах за рівні проміжки часу збільшує свою масу в одну й ту саму кількість разів.

Нехай маса колоній бактерій. момент часу $t = x$ дорівнює $f(x)$. Тоді за проміжок від $t = x$ до $t = x + y$ маса колонії бактерій збільшиться в таку саму кількість разів, як за проміжок часу від $t = 0$ до $t = y$, тобто $\frac{f(x+y)}{f(x)} = \frac{f(y)}{f(0)}$.

Якщо в момент часу $t = 0$ маса бактерій дорівнювала 1, то останню рівність можна переписати так: $f(x+y) = f(x) f(y)$.

Природно вважати, що функція, яка описує залежність маси бактерій колонії від часу, є неперервною.

Тому маса бактерій колонії в момент часу t дорівнює $f(t) = a^t$.

Ілюстративні приклади

8. Атмосферний тиск залежно від висоти місцевості над рівнем моря за законом $p = 1,01 \cdot 10^5 \cdot 0,882^h$, де p — тиск, Па, h — висота, км.

1) Знайдіть атмосферний тиск на всіх рівнях — від рівня моря до рівня найвищої вершини планети, — з інтервалом 1 км.

2) На якій висоті міститься вершина гори, якщо атмосферний тиск на ній дорівнює $5,00 \cdot 10^4$ Па?

Розв'язання. 1) Оскільки висота найвищої вершини Землі не перевищує 9 км, то виконання завдання зводиться до обчислення значень даної функції при $h = 0; 1; 2; \dots; 9$.

Скориставшись калькулятором, складемо таблицю значень.

h , км	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p \cdot 10^4$, Па	10,1	8,91	7,86	6,93	6,11	5,39	4,75	4,19	3,7	3,26

2) Розв'яжемо рівняння $1,01 \cdot 10^5 \cdot 0,882^h = 5,00 \cdot 10^4$, або $0,882^h = 0,495$.

Розв'яжемо рівняння чисельно. Використаємо складену таблицю.

Із таблиці, шукана висота більша за 5 км і менша від 6 км. З точністю в 0,5 км, за відповідь можна взяти число 5,5. Нас не цікавить повна таблиця значень, а лише такі числа h_1 і h_2 із цієї послідовності, що $0,495$ міститься між $0,882^{h_1}$ і $0,882^{h_2}$.

Число $\frac{h_1 + h_2}{2}$ є наближеним розв'язком рівняння з точністю не меншою від 0,05

тощо. Тоді $h \approx 5,5$ (км).

Відповідь. 5,5 км.

9. Розв'яжіть рівняння $(\sqrt{2} - 1)^{|x|} = \sin^2 x + 1$.

Розв'язання. Оскільки $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$, а $|x| \geq 0$, то $(\sqrt{2} - 1)^{|x|} \leq (\sqrt{2} - 1)^0 = 1$. Водночас

$\sin^2 x + 1 \geq 1$. Таким чином, дане рівняння рівносильне системі
$$\begin{cases} (\sqrt{2} - 1)^{|x|} = 1, \\ \sin^2 x + 1 = 1. \end{cases}$$

Звідси $x = 0$.

Відповідь. 0.

VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Задача. Задача Н. Шуке. Резервуар має отвір, через який за кожну одиницю часу витікає $\frac{1}{10}$ частина тієї кількості води, що містилась на початку відліку одиниці часу.

1) Яка частина води в резервуарі залишиться через 5 одиниць часу; через $7\frac{1}{3}$ одиниць часу?

2) Запишіть функцію, яка моделює процес зменшення кількості води в резервуарі. Побудуйте графік цієї функції.

3) За який час резервуар спорожніє наполовину?

Розв'язання. 1) Якщо початкову кількість води прийняти за a одиниць об'єму, то

через одну одиницю часу залишиться $\frac{9}{10}a$ одиниць об'єму води, через дві — зали-

шиться $\frac{9}{10}a \cdot \frac{9}{10} = \left(\frac{9}{10}\right)^2 a$, через три — залишиться $\left(\frac{9}{10}\right)^2 a \cdot \frac{9}{10} = \left(\frac{9}{10}\right)^3 a$. Якщо

вода витікає неперервно, то через t одиниць часу в резервуарі залишиться $\left(\frac{9}{10}\right)^t a$

одиниць об'єму води. Вираз $\left(\frac{9}{10}\right)^t a$ є математичною моделлю, яка описує об'єм води в резервуарі через t одиниць часу.

Через 5 одиниць часу в резервуарі буде $\left(\frac{9}{10}\right)^5 a$, або приблизно $0,59a$ одиниці об-

єму, тобто приблизно 60 % місткості резервуара. Через $7\frac{1}{3}$ одиниць часу в резер-

вуарі буде $\left(\frac{9}{10}\right)^{7\frac{1}{3}} a = \left(\frac{9}{10}\right)^{\frac{22}{3}} a \approx 0,462a$ одиниць об'єму води.

2) Нехай $a = 1000$ літрів $= 1\text{м}^3$. Розглянемо функцію $f(t) = \left(\frac{9}{10}\right)^t$.

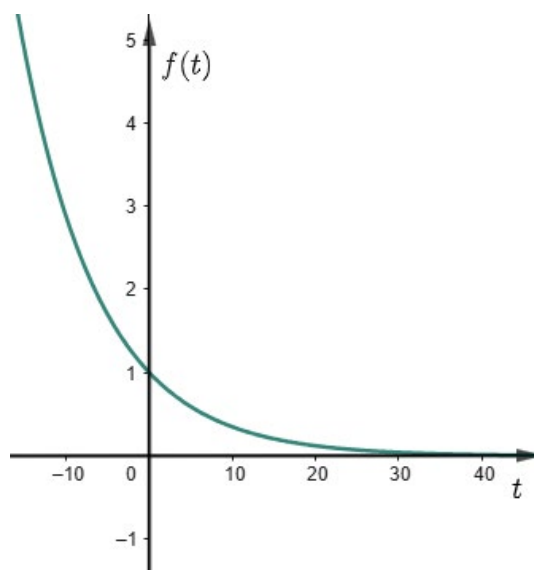
Маємо спадну показникову функція $\left(a = \frac{9}{10} < 1\right)$. Графік функції (див. рисунок).

3) Потрібно знайти таке значення t , при якому $\left(\frac{9}{10}\right)^t = \frac{1}{2}$. Невже довести, що при жодному

натуральному і навіть раціональному t дана рівність виконуватись не може. Справді,

якщо $t = n, n \in \mathbb{N}$, і $\left(\frac{9}{10}\right)^n = \frac{1}{2}$, то $2 \cdot 9^n = 10^n$,

що неможливо, оскільки права частина рівності ділиться на 5, а ліва — не ділиться



Рівень В

1. Знайдіть множину значень функції:

1) $y = -9^x$; 2) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x + 1$; 3) $y = 7^x - 4$; 4) $y = 6^{|x|}$.

2. Знайдіть найбільше значення функції $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$ на проміжку $[-2; 3]$.

3. На якому проміжку найбільше значення функції $y = 2^x$ дорівнює 16, а найменше становить $\frac{1}{4}$?

4. На якому проміжку найбільше значення функції $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ дорівнює 27, а найменше становить $\frac{1}{9}$?

5. Знайдіть значення a , якщо відомо, що графік функції $y = a^x$ проходить через точку:
1) $P(2; 9)$; 2) $P(0,5; 0,2)$; 3) $P(-1; 0,5)$; 4) $P(-1; -0,5)$.

6. Знайдіть найбільше і найменше значення функції:

1) $y = 3^x$ на проміжку $[-1; 4]$; 2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ на проміжку $[-1; 4]$;
3) $y = 4^x$ на проміжку $[-0,5; 3]$; 4) $y = 0,25^x$ на проміжку $[-0,5; 3]$.

7. Побудуйте графік функції:

1) $y = 3^x$; 2) $y = 0,5^x$; 3) $y = 3^{-x}$;
4) $y = -2^x$; 5) $y = 2^{2x}$; 6) $y = -2^{-2x}$.

8. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $3^x = 4 - x$; 2) $4^x + x = 5$; 3) $2^{x+2} = 3x + 5$;
4) $0,5^x = \sqrt{x+5}$; 5) $e^x = \sqrt{1-x}$; 6) $\pi^x + x^{0,5} = 1$.

Рівень С

1. Дослідіть на неперервність та з'ясуйте характер точок розриву функції:

1) $y = 2^{\frac{1}{x}}$; 2) $y = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\operatorname{tg}^2 x}$.

2. Дослідіть на неперервність та з'ясуйте характер точок розриву функції:

1) $y = 5^{-\frac{1}{(x-1)^2}}$; 2) $y = \left(\frac{\pi}{8}\right)^{\operatorname{ctg} x}$.

3. Знайдіть область значень функції $y = \frac{2^x - 1}{2^x - 4}$.

4. Знайдіть область значень функції $y = \frac{3^x}{3^x - 9}$.

5. Дано функцію $y = f(x)$, де $f(x) = 5^x + \frac{25}{5^x}$. При якому значенні параметра a функція $y = f(x + a)$ буде парною?

6. Дано функцію $y = f(x)$, де $f(x) = 3^x - \frac{27}{3^x}$. При якому значенні параметра a функція $y = f(x + a)$ буде непарною?

7. При яких значеннях параметра a найбільше значення функції

$$f(x) = -\left(\frac{1}{9}\right)^x + \frac{7}{2} \cdot 3^{-x} - 3a^2$$

на відрізку $[-1; 0]$ є від'ємним числом?

8. При яких значеннях параметра a функція

$$f(x) = 4^{-x} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \cdot \frac{5a}{2} + \frac{a^2 + 12}{6}$$

набуває у всіх точках відрізка $[-1; 1]$ значень, більших за 2?

VIII. Рефлексія (1 хв)

Сьогодні я зрозумів/зрозуміла, що показникова функція використовується для опису процесів, у яких

.....

Мене здивувало, що

.....

Найскладнішим для мене було

.....

Поради собі до наступного уроку

.....

Список використаних джерел

- 1) Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. Алгебра (алгебра і початки аналізу) : підручн. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закл. : академ. рівень, профіл. рівень. — Київ : Освіта, 2011. — 400 с.
- 2) Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підручн. для 11 кл. з поглибленим вивченням математики : у 2 ч. Ч. 1. — Харків : Гімназія, 2011. — 256 с.