

Урок 6. Показникові рівняння

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) вивчите означення показникового рівняння;
- 2) навчитеся розв'язувати показникові рівняння за допомогою зведення лівої та правої частин рівняння до показникових функцій з рівними основами;
- 3) навчитеся розв'язувати показникові рівняння методом розкладу їх на множники;
- 4) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Порівняйте з одиницею додатну основу a , якщо відомо, що виконується нерівність $a^{\sqrt{5}} > a^{\sqrt{11}}$
2. Які з наведених функцій є показниковими?
1) $y = 2^x$; 2) $y = x^2$; 3) $y = (-3)^x$; 4) $y = (\sqrt{2})^x$;
5) $y = x$; 6) $y = (x-2)^3$; 7) $y = \pi^x$; 8) $y = 3^{-x}$.
3. Знайдіть область значень функції: $y = -\left(\frac{1}{6}\right)^x$.
4. Обчисліть значення виразу $81^{-0,5} \cdot 27^{-\frac{7}{12}} \cdot 9^{\frac{7}{8}}$.
5. При якому значенні a графік функції $y = a^x$ проходить через точку $\left(2; \frac{4}{9}\right)$?

III. Види показникових рівнянь

Означення. Показниковими рівняннями називаються рівняння, в яких змінна міститься в показнику степеня.

Показникові рівняння умовно можна класифікувати за методами їхнього розв'язування (див. таблицю).

№	Види рівнянь	Приклади
1.	Рівняння, що розв'язуються переходом до рівних основ.	1) $2^x = 4^5$; 2) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{7}{3}\right)^{5x-1}$.
2.	Рівняння, що розв'язуються за допомогою переходу до однакового показника степеня.	1) $5^{2x-4} = 49^{2-x}$; 2) $3^{x^2-9} = 7^{x^2-9}$.
3.	Рівняння, що розв'язуються за допомогою винесення спільного множника за дужки.	1) $5^{x+1} + 5^x = 150$; 2) $2^{x+2} - 2^x = 96$.
4.	Рівняння, що зводяться до алгебричних за допомогою заміни змінних.	1) $7^{2x} - 6 \cdot 7^x + 5 = 0$; 2) $4^x + 2^x = 72$.
5.	Однорідні рівняння, відносно показникових функцій.	1) $3 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 3^{2x} = 0$; 2) $2^{2x+1} - 7 \cdot 10^x + 25^{x+0,5} = 0$.
6.	Рівняння, що розв'язуються графічним методом або за допомогою властивостей функцій.	1) $3^x = 11 - x$; 2) $3^{x-2} = \frac{9}{x}$.

IV. Розв'язування показникових рівнянь зведенням лівої та правої частин рівняння до показникових функцій з рівними основами

Теорема. Рівність $a^{x_1} = a^{x_2}$ виконується, за умови, якщо $x_1 = x_2$.

Доведення. Якщо $x_1 = x_2$, то $a^{x_1} = a^{x_2}$. Доведемо, що з рівності $a^{x_1} = a^{x_2}$ випливає рівність $x_1 = x_2$.

Припустимо, що $x_1 \neq x_2$, тобто $x_1 < x_2$ або $x_1 > x_2$. Нехай, наприклад, $x_1 < x_2$.

Розглянемо показникову функцію $y = a^x$. Вона є або зростаючою, або спадною. Тоді з нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що $a^{x_1} < a^{x_2}$ (при $a > 1$) або $a^{x_1} > a^{x_2}$ (при $0 < a < 1$). Проте за умовою виконується рівність $a^{x_1} = a^{x_2}$. Отримали суперечність.

Аналогічно розглядають випадок, коли $x_1 > x_2$.

Наслідок. Якщо $a > 0$ і $a \neq 1$, то рівняння $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ рівносильне рівнянню $f(x) = g(x)$.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{7}{3}\right)^{5x-1}$.

Розв'язання. $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}\right)^{5x-1}$, $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{3}{7}\right)^{1-5x}$, $3x+1 = 1-5x$, $8x = 0$, $x = 0$.

Відповідь. 0.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $5^{2x-4} = 49^{2-x}$.

[illegible]

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $3^{x^2-9} = 7^{x^2-9}$.

[illegible]

V. Метод розкладу показникового рівняння на множники

Якщо у рівнянні використати властивість $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, то рівняння можливо розкласти на множники методом винесення спільного множника за дужки або методом групування й винесення спільного множника за дужки.

Приклад 4. Розв'яжіть рівняння $2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^x = 28$.

[illegible]

Приклад 5. Розв'яжіть рівняння $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 25$.

[illegible]

VI. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Екологи зафіксували концентрацію небезпечної речовини в річці — 1600 одиниць на кубічний метр води. Завдяки природним процесам самоочищення вода щотижня очищується на 80% від залишку попереднього тижня.

1. Складіть функцію $C(t)$, де $C(t)$ — залежність концентрації небезпечної речовини в річці від часу t (в тижнях).
2. Через скільки тижнів концентрація небезпечної речовини складатиме 655,36 одиниць на кубічний метр води?

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $3^{x-1} = 27$; 2) $5^{x-2} = 25$; 3) $6^{x-3} = 36$; 4) $3^x = \frac{1}{9}$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $4^x = 8$; 2) $5^{3x-1} = 0,2$; 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x} = \sqrt[4]{2}$; 4) $4^x = 2^{6+x-x^2}$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $0,3^x = \frac{1000}{27}$; 2) $0,7^x = \frac{1000}{343}$; 3) $\left(\frac{4}{5}\right)^x = \frac{25}{16}$; 4) $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{16}{81}$.

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $0,6^{2x-3} = 1$; 2) $8^x = 16$; 3) $0,16^x = \frac{5}{2}$; 4) $\sqrt{5^x} = 25$.

5. Розв'яжіть рівняння методом розкладу на множники:

1) $7^{x+2} + 4 \cdot 7^x = 539$; 2) $4^{x+1} + 4^x = 320$; 3) $3^{x+2} - 2 \cdot 3^{x-2} = 79$;
4) $3^{x+3} + 3^x = 84$; 5) $3^{x+3} + 5 \cdot 3^{x-1} - 86 = 0$; 6) $5^{x+1} + 5^x - 5^{x-1} = 29$.

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x-3} = 3^{5x-1}$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-4} = 2^{4x-1}$; 3) $\left(\frac{5}{6}\right)^{1-2x} = \left(\frac{6}{5}\right)^{2-x}$; 4) $\left(\frac{7}{3}\right)^{3-2x} = \left(\frac{3}{7}\right)^{4+3x}$.

7. Розв'яжіть рівняння:

1) $0,25^{x^2-4} = 2^{x^2+1}$; 2) $\left(\frac{4}{9}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}$; 3) $2^x \cdot 5^x = 0,1 \cdot (10^{x-1})^5$;
4) $36^x = \left(\frac{1}{216}\right)^{2-x}$; 5) $5^{x^2-2x} = 6^{x^2-2x}$; 6) $3^{x-1} = 6^x \cdot 2^{-x} \cdot 3^{x+1}$.

8. Розв'яжіть рівняння:

1) $0,4^{x^2-x-6} = 1$; 2) $\sqrt{2^x} = 8^{-\frac{2}{3}}$; 3) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x+3} = 4,5^{x-2}$;
4) $2^{x-1} \cdot 3^{x-1} = \frac{1}{36} \cdot 6^{2x+5}$; 5) $32^{\frac{3}{5}x-2} = 4^{6-\frac{3}{2}x}$; 6) $3^{x^2-9} = 7^{x^2-9}$.

Рівень В

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $2^{2x+1} = \sqrt{2}$; 2) $9^{x-7} = \frac{1}{3}$; 3) $2^{7-2x} \cdot 8^{x+9} = 256$; 4) $2^{3x+8} = \frac{1}{16}$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $(\sqrt{2})^{x+2} = \frac{1}{2}$; 2) $(\sqrt[3]{5})^{6x-1} = \sqrt[6]{5}$; 3) $(\sqrt{3})^{-2x+9} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $(\sqrt[5]{4})^{-9x-6} = \sqrt[3]{4}$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $3^{x^2-4,5} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{27}$;

2) $\sqrt{2^{-1}} \cdot 2^{x^2-7,5} = \frac{1}{128}$;

3) $0,5^{x^2-5,5} \cdot \sqrt{0,5} = 32$;

4) $0,1^{x^2-0,5} \cdot \sqrt{0,1} = 0,001$.

4. Розв'яжіть рівняння

1) $\frac{1}{9} \sqrt{3^{3x-1}} = 81^{-\frac{3}{4}}$;

2) $4^x \cdot 3^{x+1} = 0,25 \cdot 12^{3x-1}$;

3) $0,25 \cdot 2^{x^2} = \sqrt[3]{0,25 \cdot 4^{2x}}$;

4) $5^{x-1} = 10^x \cdot 2^{-x} \cdot 5^{x+1}$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{2^x} = 8^{-\frac{2}{3}}$;

2) $\frac{1}{9} \cdot \sqrt{3^{3x-1}} = 81^{-\frac{3}{4}}$;

3) $16^{-1} \cdot \sqrt{64^x} = 2^x$;

4) $2^{\sqrt{x}} = 16 \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{5}{4}-\frac{x}{4}}}$.

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $4 \cdot 2^{\cos x} = \sqrt{8}$;

2) $\sqrt[3]{9^{2x+1}} = \frac{3}{\sqrt[5]{3}}$.

7. Розв'яжіть рівняння:

1) $2^{x^2} = \frac{16^2}{4^x}$;

2) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2x^2}{3}} = 4^{-x} \cdot 8^{-4}$;

3) $(0,5)^{x^2} \cdot 2^{2x-2} = 64^{-1}$;

4) $2^{x(x+2)-\frac{1}{2}} = 4\sqrt{2} \cdot 4^x$.

8. Розв'яжіть рівняння методом розкладу на множники:

1) $3^x - 3^{x+3} = -78$;

2) $5^{2x-1} - 5^{2x-3} = 4,8$;

3) $7^{2x+1} + 7^{2x+2} + 7^{2x+3} = 57$;

4) $2^{4x-1} + 2^{4x-2} - 2^{4x-3} = 160$.

Рівень С

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $4^{|x-1|} = 8$;

2) $4 \cdot 2^{\cos x} = \sqrt{8}$;

3) $3^x - 2 \cdot 3^{x-2} = 7$;

4) $4 \cdot 3^{x-1} + 3^{x+1} = 117$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $25^x = 5^{3-x}$;

2) $2^x \cdot 3^{x+4} = 108$;

3) $3^x \cdot 5^{2x-3} = 45$;

4) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \left(\frac{9}{16}\right)^x = \frac{3}{8}$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $(\sqrt{12})^x \cdot (\sqrt{3})^x = \frac{1}{6}$;

2) $(\sqrt[3]{3})^{2x} \cdot (\sqrt[3]{9})^{2x} = 243$;

3) $\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{3x^2-3} = 0,81^{-2x}$;

4) $\left(\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{3}}\right)^{x^2+4} = 20,25^{x+1}$.

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $4(\sqrt{5}-2)^{x-12} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}+2}\right)^{x-12}$;

2) $9(3-\sqrt{8})^{2x+1} = \left(\frac{3}{3+\sqrt{8}}\right)^{2x+1}$.

5. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \left(\sin \frac{\pi}{2} \right)^{2x-3} = \left(\sin \frac{\pi}{2} \right)^{x+5} ; \quad 2) (1+|a|)^x = (1+|a|)^{2-x}.$$

6. Розв'яжіть рівняння $(1+b^2)^{\sqrt{x}} = (1+b^2)^{4-\sqrt{x}}$.

7. При яких значеннях параметра a рівняння $2^{|x|} = ax^2 + a^2$ має єдиний розв'язок?

8. При яких значеннях параметра a рівняння $\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|} = \left(a + \frac{1}{3}\right)x^2 + a^2$ має єдиний розв'язок?

Рефлексія

1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що

2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що

3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію

4) Найскладнішим для мене було

5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності

6) Найбільше мені сподобалося

Можливі теми проєктів

- 1.** Історичний розвиток показникових рівнянь.
- 2.** Моделювання реальних процесів за допомогою показникових рівнянь.
- 3.** Показникові рівняння у завданнях ЗНО/НМТ, міжнародних тестах.
- 4.** Показникові рівняння та фінансова грамотність.
- 5.** Застосування показникових рівнянь для моделювання екологічних катастроф.







