

### Урок 6. Показникові рівняння

#### План уроку

1. Види показникових рівнянь.
2. Розв'язування показникових рівнянь зведенням лівої та правої частин рівняння до показникових функцій з рівними основами.

#### Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

виявляє ініціативу, пропонує та обґрунтовує ідеї щодо способу розв'язання специфічних проблемних ситуацій [12 МАО 2.2.1–1 П]

аналізує спільні та відмінні риси різних моделей і шляхів розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1–1 П];

обґрунтовано пояснює хід своїх міркувань, зважаючи на мету і учасників спілкування [12 МАО 4.3.2–2 П].

#### Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання можна лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово впродовж викладення матеріалу.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на власний розсуд.
- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 6) Заплануйте розв'язання практичної задачі як групову активність.
- 7) Пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

- 8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.
- 9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С.
- 10) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

## I. Організаційна частина (2 хв)

### Мотиваційні запитання

- 1) Чи можна розв'язати рівняння, якщо невідома величина знаходиться в показнику?
- 2) Чи завжди показникове рівняння має розв'язок?
- 3) Скільки розв'язків може мати показникове рівняння?
- 4) Як властивості показникової функції допомагають розв'язувати показникові рівняння?
- 5) Де в реальному житті виникає потреба розв'язувати показникові рівняння?

## II. Повторення (3–4 хв)

1. Порівняйте з одиницею додатну основу  $a$ , якщо відомо, що виконується нерівність  $a^{\sqrt{5}} > a^{\sqrt{11}}$   
Відповідь.  $0 < a < 1$ .
2. Які з наведених функцій є показниковими?  
1)  $y = 2^x$ ;                      2)  $y = x^2$ ;                      3)  $y = (-3)^x$ ;                      4)  $y = (\sqrt{2})^x$ ;  
5)  $y = x$ ;                      6)  $y = (x - 2)^3$ ;                      7)  $y = \pi^x$ ;                      8)  $y = 3^{-x}$ .  
Відповідь. 1), 4), 7), 8).
3. Знайдіть область значень функції:  $y = -\left(\frac{1}{6}\right)^x$ .  
Відповідь.  $E(y) = (-\infty; 0)$ .
4. Обчисліть значення виразу  $81^{-0,5} \cdot 27^{-\frac{7}{12}} \cdot 9^{\frac{7}{8}}$ .  
Відповідь.  $\frac{1}{9}$ .
5. При якому значенні  $a$  графік функції  $y = a^x$  проходить через точку  $\left(2; \frac{4}{9}\right)$ ?  
Відповідь.  $\frac{2}{3}$ .

## Як я вирішую певну проблему?

**Задача.** Екологи зафіксували концентрацію небезпечної речовини в річці — 1600 одиниць на кубічний метр води. Завдяки природним процесам самоочищення вода щотижня очищується на 80% від залишку попереднього тижня.

1. Складіть функцію  $C(t)$ , де  $C(t)$  — залежність концентрації небезпечної речовини в річці від часу  $t$  (в тижнях).
2. Через скільки тижнів концентрація небезпечної речовини складатиме 655,36 одиниць на кубічний метр води?

### III. Види показникових рівнянь (5 хв)

**Означення.** Показниковими рівняннями називаються рівняння, в яких змінна міститься в показнику степеня.

Показникові рівняння умовно можна класифікувати за методами їхнього розв'язування (див. таблицю).

| №  | Види рівнянь                                                                        | Приклади                                                                                                    |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. | Рівняння, що розв'язуються переходом до рівних основ.                               | 1) $2^x = 4^5$ ;<br>2) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{7}{3}\right)^{5x-1}$ .                |
| 2. | Рівняння, що розв'язуються за допомогою переходу до однакового показника степеня.   | 1) $5^{2x-4} = 49^{2-x}$ ;<br>2) $3^{x^2-9} = 7^{x^2-9}$ .                                                  |
| 3. | Рівняння, що розв'язуються за допомогою винесення спільного множника за дужки.      | 1) $5^{x+1} + 5^x = 150$ ;<br>2) $2^{x+2} - 2^x = 96$ .                                                     |
| 4. | Рівняння, що зводяться до алгебричних за допомогою заміни змінних.                  | 1) $7^{2x} - 6 \cdot 7^x + 5 = 0$ ;<br>2) $4^x + 2^x = 72$ .                                                |
| 5. | Однорідні рівняння, відносно показникових функцій.                                  | 1) $3 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 3^{2x} = 0$ ;<br>2) $2^{2x+1} - 7 \cdot 10^x + 25^{x+0,5} = 0$ . |
| 6. | Рівняння, що розв'язуються графічним методом або за допомогою властивостей функцій. | 1) $3^x = 11 - x$ ;<br>2) $3^{x-2} = \frac{9}{x}$ .                                                         |

### IV. Розв'язування показникових рівнянь зведенням лівої та правої частин рівняння до показникових функцій з рівними основами

**Теорема.** Рівність  $a^{x_1} = a^{x_2}$  виконується, за умови, якщо  $x_1 = x_2$ .

**Доведення.** Якщо  $x_1 = x_2$ , то  $a^{x_1} = a^{x_2}$ . Доведемо, що з рівності  $a^{x_1} = a^{x_2}$  випливає рівність  $x_1 = x_2$ .

Припустимо, що  $x_1 \neq x_2$ , тобто  $x_1 < x_2$  або  $x_1 > x_2$ . Нехай, наприклад,  $x_1 < x_2$ .

Розглянемо показникову функцію  $y = a^x$ . Вона є або зростаючою, або спадною. Тоді з нерівності  $x_1 < x_2$  випливає, що  $a^{x_1} < a^{x_2}$  (при  $a > 1$ ) або  $a^{x_1} > a^{x_2}$  (при  $0 < a < 1$ ). Проте за умовою виконується рівність  $a^{x_1} = a^{x_2}$ . Отримали суперечність.

Аналогічно розглядають випадок, коли  $x_1 > x_2$ .

**Наслідок.** Якщо  $a > 0$  і  $a \neq 1$ , то рівняння  $a^{f(x)} = a^{g(x)}$  рівносильне рівнянню  $f(x) = g(x)$ .

### Ілюстративні приклади (5–7 хв)

**6.** Розв'яжіть рівняння  $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{7}{3}\right)^{5x-1}$ .

*Розв'язання.*  $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}\right)^{5x-1}$ ,  $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{3}{7}\right)^{1-5x}$ ,  $3x+1 = 1-5x$ ,  $8x = 0$ ,  $x = 0$ .

*Відповідь.* 0.

**7.** Розв'яжіть рівняння  $5^{2x-4} = 49^{2-x}$ .

*Розв'язання.*  $(5^2)^{x-2} = (7^2)^{2-x}$ ,  $(25)^{x-2} = \left(\frac{1}{49}\right)^{x-2}$ .

Оскільки  $\left(\frac{1}{49}\right)^{x-2} > 0$ , то поділимо обидві частини даного рівняння на  $\left(\frac{1}{49}\right)^{x-2}$ .

Отримаємо рівняння, рівносильне даному:

$(25 \cdot 49)^{x-2} = 1$ ,  $1225^{x-2} = 1225^0$ ,  $x-2 = 0$ ,  $x = 2$ .

*Відповідь.* 2.

**8.** Розв'яжіть рівняння  $3^{x^2-9} = 7^{x^2-9}$ .

*Розв'язання.* Оскільки  $7^{x^2-9} > 0$ , то поділимо обидві частини даного рівняння на  $7^{x^2-9}$ .

Отримаємо рівняння, рівносильне даному:

$\frac{3^{x^2-9}}{7^{x^2-9}} = 1$ ,  $\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2-9} = \left(\frac{3}{7}\right)^0$ ,  $x^2-9 = 0$ ,  $x^2 = 9$ ,  $x = -3$  або  $x = 3$ .

*Відповідь.* -3; 3.

**9.** Розв'яжіть рівняння  $\left(\frac{18}{49}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^{x-1} = \frac{343}{8}$ .

*Розв'язання.*  $\left(\frac{18}{49} \cdot \frac{7}{9}\right)^{x-1} = \frac{343}{8}$ ,  $\left(\frac{2}{7}\right)^{x-1} = \left(\frac{7}{2}\right)^3$ ,  $\left(\frac{2}{7}\right)^{x-1} = \left(\frac{2}{7}\right)^{-3}$ ,  $x-1 = -3$ ,  $x = -2$ .

*Відповідь.* -2.

## V. Метод розкладу показникового рівняння на множники

Якщо у рівнянні використати властивість  $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ , то рівняння можливо розкласти на множники методом винесення спільного множника за дужки або методом групування й винесення спільного множника за дужки.

### Ілюстративні приклади (5–7 хв)

- 10.** Розв'яжіть рівняння  $2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^x = 28$ .

*Розв'язання.*  $2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^x = 28$ ,  $2 \cdot 2^x + 2^{-1} \cdot 2^x + 2^x = 28$ ,  $2^x \cdot (2 + 2^{-1} + 1) = 28$ ,

$$2^x \cdot \left(3 + \frac{1}{2}\right) = 28, \quad 2^x = 28 \cdot \frac{2}{7}, \quad 2^x = 8, \quad 2^x = 2^3, \quad x = 3.$$

*Відповідь.* 3.

- 11.** Розв'яжіть рівняння  $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 25$ .

*Розв'язання.* Можливе винесення множника за дужки й без використання властивості  $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ :

$$3^{x-2} \cdot \left(\frac{3^{x+1}}{3^{x-2}} - \frac{2 \cdot 3^{x-2}}{3^{x-2}}\right) = 25, \quad 3^{x-2} \cdot (3^3 - 2) = 25, \quad 3^{x-2} \cdot 25 = 25, \quad 3^{x-2} = 1, \quad x - 2 = 0, \quad x = 2.$$

*Відповідь.* 2.

## VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

### Як я вирішую певну проблему?

**Задача.** Екологи зафіксували концентрацію небезпечної речовини в річці — 1600 одиниць на кубічний метр води. Завдяки природним процесам самоочищення вода щотижня очищується на 80% від залишку попереднього тижня.

1. Складіть функцію  $C(t)$ , де  $C(t)$  — залежність концентрації небезпечної речовини в річці від часу  $t$  (в тижнях).
2. Через скільки тижнів концентрація небезпечної речовини складатиме 655,36 одиниць на кубічний метр води?

*Розв'язання.*

1. Концентрація небезпечної речовини зменшується на 80% щотижня відносно попереднього тижня. Початкова величина становить 1600, тому  $C(t) = 1600 \cdot 0,8^t$ .
2. З'ясуємо, через скільки тижнів концентрація небезпечної речовини складатиме 655,36 одиниць на кубічний метр води:

$$1600 \cdot 0,8^t = 655,36, \quad 0,8^t = \frac{655,36}{1600}, \quad 0,8^t = \frac{256}{625}, \quad \left(\frac{4}{5}\right)^t = \left(\frac{4}{5}\right)^4, \quad \text{звідси } t = 4.$$

Отже, концентрація небезпечної речовини складатиме 655,36 одиниць через 4 тижні.

*Відповідь.* 1.  $C(t) = 1600 \cdot 0,8^t$ . 2. Через 4 тижні.

## VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (5–10 хв)

### Рівень А

1. Розв'яжіть рівняння:

1)  $3^{x-1} = 27$ ;      2)  $5^{x-2} = 25$ ;      3)  $6^{x-3} = 36$ ;      4)  $3^x = \frac{1}{9}$ .

2. Розв'яжіть рівняння:

1)  $4^x = 8$ ;      2)  $5^{3x-1} = 0,2$ ;      3)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x} = \sqrt[4]{2}$ ;      4)  $4^x = 2^{6+x-x^2}$ .

3. Розв'яжіть рівняння:

1)  $0,3^x = \frac{1000}{27}$ ;      2)  $0,7^x = \frac{1000}{343}$ ;      3)  $\left(\frac{4}{5}\right)^x = \frac{25}{16}$ ;      4)  $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{16}{81}$ .

4. Розв'яжіть рівняння:

1)  $0,6^{2x-3} = 1$ ;      2)  $8^x = 16$ ;      3)  $0,16^x = \frac{5}{2}$ ;      4)  $\sqrt{5^x} = 25$ .

5. Розв'яжіть рівняння методом розкладу на множники:

1)  $7^{x+2} + 4 \cdot 7^x = 539$ ;      2)  $4^{x+1} + 4^x = 320$ ;      3)  $3^{x+2} - 2 \cdot 3^{x-2} = 79$ ;  
4)  $3^{x+3} + 3^x = 84$ ;      5)  $3^{x+3} + 5 \cdot 3^{x-1} - 86 = 0$ ;      6)  $5^{x+1} + 5^x - 5^{x-1} = 29$ .

6. Розв'яжіть рівняння:

1)  $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x-3} = 3^{5x-1}$ ;      2)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-4} = 2^{4x-1}$ ;      3)  $\left(\frac{5}{6}\right)^{1-2x} = \left(\frac{6}{5}\right)^{2-x}$ ;      4)  $\left(\frac{7}{3}\right)^{3-2x} = \left(\frac{3}{7}\right)^{4+3x}$ .

7. Розв'яжіть рівняння:

1)  $0,25^{x^2-4} = 2^{x^2+1}$ ;      2)  $\left(\frac{4}{9}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}$ ;      3)  $2^x \cdot 5^x = 0,1 \cdot (10^{x-1})^5$ ;  
4)  $36^x = \left(\frac{1}{216}\right)^{2-x}$ ;      5)  $5^{x^2-2x} = 6^{x^2-2x}$ ;      6)  $3^{x-1} = 6^x \cdot 2^{-x} \cdot 3^{x+1}$ .

8. Розв'яжіть рівняння:

1)  $0,4^{x^2-x-6} = 1$ ;      2)  $\sqrt{2^x} = 8^{-\frac{2}{3}}$ ;      3)  $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x+3} = 4,5^{x-2}$ ;  
4)  $2^{x-1} \cdot 3^{x-1} = \frac{1}{36} \cdot 6^{2x+5}$ ;      5)  $32^{\frac{3}{5}x-2} = 4^{6-\frac{3}{2}x}$ ;      6)  $3^{x^2-9} = 7^{x^2-9}$ .

### Рівень В

1. Розв'яжіть рівняння:

1)  $2^{2x+1} = \sqrt{2}$ ;      2)  $9^{x-7} = \frac{1}{3}$ ;      3)  $2^{7-2x} \cdot 8^{x+9} = 256$ ;      4)  $2^{3x+8} = \frac{1}{16}$ .

2. Розв'яжіть рівняння:

1)  $(\sqrt{2})^{x+2} = \frac{1}{2}$ ;      2)  $(\sqrt[3]{5})^{6x-1} = \sqrt[6]{5}$ ;      3)  $(\sqrt{3})^{-2x+9} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ;      4)  $(\sqrt[5]{4})^{-9x-6} = \sqrt[3]{4}$ .

**3.** Розв'яжіть рівняння:

1)  $3^{x^2-4,5} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{27}$ ;

3)  $0,5^{x^2-5,5} \cdot \sqrt{0,5} = 32$ ;

2)  $\sqrt{2^{-1}} \cdot 2^{x^2-7,5} = \frac{1}{128}$ ;

4)  $0,1^{x^2-0,5} \cdot \sqrt{0,1} = 0,001$ .

**4.** Розв'яжіть рівняння

1)  $\frac{1}{9} \sqrt{3^{3x-1}} = 81^{-\frac{3}{4}}$ ;

3)  $0,25 \cdot 2^{x^2} = \sqrt[3]{0,25 \cdot 4^{2x}}$ ;

2)  $4^x \cdot 3^{x+1} = 0,25 \cdot 12^{3x-1}$ ;

4)  $5^{x-1} = 10^x \cdot 2^{-x} \cdot 5^{x+1}$ .

**5.** Розв'яжіть рівняння:

1)  $\sqrt{2^x} = 8^{-\frac{2}{3}}$ ;

2)  $\frac{1}{9} \cdot \sqrt{3^{3x-1}} = 81^{-\frac{3}{4}}$ ;

3)  $16^{-1} \cdot \sqrt{64^x} = 2^x$ ;

4)  $2^{\sqrt{x}} = 16 \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{5}{4}-\frac{x}{4}}}$ .

**6.** Розв'яжіть рівняння:

1)  $4 \cdot 2^{\cos x} = \sqrt{8}$ ;

2)  $\sqrt[3]{9^{2x+1}} = \frac{3}{\sqrt[5]{3}}$ .

**7.** Розв'яжіть рівняння:

1)  $2^{x^2} = \frac{16^2}{4^x}$ ;

2)  $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2x^2}{3}} = 4^{-x} \cdot 8^{-4}$ ;

3)  $(0,5)^{x^2} \cdot 2^{2x-2} = 64^{-1}$ ;

4)  $2^{x(x+2)-\frac{1}{2}} = 4\sqrt{2} \cdot 4^x$ .

**8.** Розв'яжіть рівняння методом розкладу на множники:

1)  $3^x - 3^{x+3} = -78$ ;

2)  $5^{2x-1} - 5^{2x-3} = 4,8$ ;

3)  $7^{2x+1} + 7^{2x+2} + 7^{2x+3} = 57$ ;

4)  $2^{4x-1} + 2^{4x-2} - 2^{4x-3} = 160$ .

## Рівень С

**1.** Розв'яжіть рівняння:

1)  $4^{|x-1|} = 8$ ;

3)  $3^x - 2 \cdot 3^{x-2} = 7$ ;

2)  $4 \cdot 2^{\cos x} = \sqrt{8}$ ;

4)  $4 \cdot 3^{x-1} + 3^{x+1} = 117$ .

**2.** Розв'яжіть рівняння:

1)  $25^x = 5^{3-x}$ ;

2)  $2^x \cdot 3^{x+4} = 108$ ;

3)  $3^x \cdot 5^{2x-3} = 45$ ;

4)  $\left(\frac{2}{3}\right)^x \left(\frac{9}{16}\right)^x = \frac{3}{8}$ .

**3.** Розв'яжіть рівняння:

1)  $(\sqrt{12})^x \cdot (\sqrt{3})^x = \frac{1}{6}$ ;

3)  $\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{3x^2-3} = 0,81^{-2x}$ ;

2)  $(\sqrt[3]{3})^{2x} \cdot (\sqrt[3]{9})^{2x} = 243$ ;

4)  $\left(\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{3}}\right)^{x^2+4} = 20,25^{x+1}$ .

**4.** Розв'яжіть рівняння:

1)  $4(\sqrt{5}-2)^{x-12} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}+2}\right)^{x-12}$ ;

2)  $9(3-\sqrt{8})^{2x+1} = \left(\frac{3}{3+\sqrt{8}}\right)^{2x+1}$ .

**5.** Розв'яжіть рівняння:

$$1) \left( \sin \frac{\pi}{2} \right)^{2x-3} = \left( \sin \frac{\pi}{2} \right)^{x+5} ; \quad 2) (1+|a|)^x = (1+|a|)^{2-x}.$$

**6.** Розв'яжіть рівняння  $(1+b^2)^{\sqrt{x}} = (1+b^2)^{4-\sqrt{x}}$ .

**7.** При яких значеннях параметра  $a$  рівняння  $2^{|x|} = ax^2 + a^2$  має єдиний розв'язок?

**8.** При яких значеннях параметра  $a$  рівняння  $\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|} = \left(a + \frac{1}{3}\right)x^2 + a^2$  має єдиний розв'язок?

## VIII. Рефлексія (1–2 хв)

1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що .....

2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що .....

3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію .....

4) Найскладнішим для мене було .....

5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності .....

6) Найбільше мені сподобалося .....

### Можливі теми проєктів

- 1.** Історичний розвиток показникових рівнянь.
- 2.** Моделювання реальних процесів за допомогою показникових рівнянь.
- 3.** Показникові рівняння у завданнях ЗНО/НМТ, міжнародних тестах.
- 4.** Показникові рівняння та фінансова грамотність.
- 5.** Застосування показникових рівнянь для моделювання екологічних катастроф.



### **Список використаних джерел**

- 1) Нелін Є. П., Долгова О. Є. Алгебра. 11 клас : підручн. для загальноосвітніх навчальних закладів : академічний, профільний рівні. — Харків : Гімназія, 2011. — 448 с. : іл.
- 2) Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підручн. для 11 класу з поглибленим вивченням математики : у 2 ч. — Харків : Гімназія, 2011. — Ч. 1. — 256 с. : іл.