

Урок 7. **Методи розв'язування показникових рівнянь**

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

застосуєте метод розкладу на множники для знаходження розв'язків показникових рівнянь;

використаєте метод заміни невідомої для спрощення та розв'язування показникових рівнянь;

перевірите правильність розв'язків показникових рівнянь;

застосуєте показникові рівняння для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Розв'яжіть рівняння $4^{x-2} = (0,5)^{1-x}$.
2. Розв'яжіть рівняння $\left(\frac{1}{25}\right)^{0,2x-2} = 125$.
3. Знайдіть добуток рівняння $3^{x^2-1} = 243$.
4. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{3^x} = 36$.
5. Розв'яжіть рівняння $0,125^{x-1} = 8$.

III. Методи розв'язування показникових рівнянь

Показникові рівняння умовно можна класифікувати за методами їхнього розв'язування (див. таблицю).

№	Види рівнянь	Приклади
1.	Рівняння, що розв'язуються переходом до рівних основ.	1) $2^x = 4^5$; 2) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{7}{3}\right)^{5x-1}$.
2.	Рівняння, що розв'язуються за допомогою переходу до однакового показника степеня.	1) $5^{2x-4} = 49^{2-x}$; 2) $3^{x^2-9} = 7^{x^2-9}$.
3.	Рівняння, що розв'язуються за допомогою винесення спільного множника за дужки.	1) $5^{x+1} + 5^x = 150$; 2) $2^{x+2} - 2^x = 96$.
4.	Рівняння, що зводяться до алгебричних за допомогою заміни змінних.	1) $7^{2x} - 6 \cdot 7^x + 5 = 0$; 2) $4^x + 2^x = 72$.
5.	Однорідні рівняння, відносно показникових функцій.	1) $3 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 3^{2x} = 0$; 2) $2^{2x+1} - 7 \cdot 10^x + 25^{x+0,5} = 0$.
6.	Рівняння, що розв'язуються графічним методом або за допомогою властивостей функцій.	1) $3^x = 11 - x$; 2) $3^{x-2} = \frac{9}{x}$.

IV. Метод розкладу показникового рівняння на множники

Реалізацію метода розкладу показникового рівняння на множники розглянуто на попередньому уроці.

Якщо у рівнянні використати властивість $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, то рівняння можливо розкласти на множники методом винесення спільного множника за дужки або методом групування й винесення спільного множника за дужки.

Якщо ліву частину рівняння можна розкласти на множники, а права дорівнює нулю, то можна перейти до сукупності рівнянь де кожен множник дорівнює нулю.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $x^2 \cdot 4^{\sqrt{6-x}} + 4^{2+x} = 16 \cdot 2^{2\sqrt{6-x}} + x^2 \cdot 2^{2x}$.

$$\begin{aligned}
 &\text{Розв'язання. } x^2 \cdot 2^{2\sqrt{6-x}} + 2^{4+2x} = 16 \cdot 2^{2\sqrt{6-x}} + x^2 \cdot 2^{2x}, \\
 &x^2 \cdot 2^{2\sqrt{6-x}} - 16 \cdot 2^{2\sqrt{6-x}} = x^2 \cdot 2^{2x} - 2^{4+2x}, \quad 2^{2\sqrt{6-x}}(x^2 - 16) = x^2 \cdot 2^{2x} - 16 \cdot 2^{2x}, \\
 &4^{\sqrt{6-x}}(x^2 - 16) = 2^{2x}(x^2 - 16), \quad (x^2 - 16)(4^{\sqrt{6-x}} - 4^x) = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x^2 - 16 = 0, \\ 4^{\sqrt{6-x}} - 4^x = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x = -4, \\ x = 4, \\ \sqrt{6-x} = x. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -4, \\ x = 4, \\ x \leq 6, \\ \left\{ \begin{array}{l} 6 - x = x^2, \\ x \geq 0. \end{array} \right. \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} x = -4, \\ x = 4, \\ x \leq 6, \\ \left\{ \begin{array}{l} x = 2, \\ x = -3, \\ x \geq 0. \end{array} \right. \end{array} \right]$$

Відповідь. $-4; 4; 2$.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $2 \cdot 3^{2x+1} - 4 \cdot 3^{2x-2} - 25 \cdot 3^{2x-3} = 375$.

[illegible]

V. Метод уведення заміни змінної

Досить часто показникове рівняння можна звести до алгебричного за допомогою заміни $t = a^{f(x)}$. Наприклад, рівняння виду $Aa^{2f(x)} + Ba^{f(x)} + C = 0$ можна розв'язати введенням заміни $a^{f(x)} = t$, при цьому $a^{2f(x)} = t^2$, або рівняння виду $Aa^{f(x)} + Ba^{-f(x)} + C = 0$ можна розв'язати за допомогою заміни $a^{f(x)} = t$, при цьому $a^{-f(x)} = \frac{1}{t}$.

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $25^x + 4 \cdot 5^x - 5 = 0$.

[illegible]

Приклад 4. Розв'яжіть рівняння $4^x - 2 \cdot 5^{2x} + 10^x = 0$.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light blue lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

VI. Розв'язування практичних задач

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Радіоактивний ізотоп йод-131 використовується для визначення порушень функції щитоподібної залози людини. Йод-131 вводять у кровоносну систему. Здорова щитоподібна залоза поглинає весь йод. Період напіврозпаду йоду-131 становить 8,2 дня, тому його розпад можна змодельовати показниковим рівнянням

$$A_L = A_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{8,2}}$$
, де A_L — кількість йоду-131, що залишилася, A_0 — початкова кількість йоду-131, t — час, що минув, у днях.

- 1) Через який час у щитоподібній залозі здорової людини залишиться 25 % йоду-131?
- 2) Яка частина (у відсотках) початкової кількості йоду-131 залишиться в організмі пацієнта через 30 днів?
- 3) Чи може, за цією моделлю кількість йоду-131 дорівнювати нулю?

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Розв'яжіть рівняння:

- | | | |
|-----------------------------------|------------------------------------|--|
| 1) $3^{x+2} + 3^x = 30$; | 2) $4^{x+1} + 4^{x-2} = 260$; | 3) $2^{x+4} - 2^x = 120$; |
| 4) $7^{x+1} + 4 \cdot 7^x = 77$; | 5) $5^x + 7 \cdot 5^{x-2} = 160$; | 6) $6^{x+1} - 4 \cdot 6^{x-1} = 192$. |

2. Розв'яжіть рівняння:

- | | | |
|------------------------------------|---|---------------------------------------|
| 1) $7^{x+2} + 4 \cdot 7^x = 539$; | 2) $4^{x+1} + 4^x = 320$; | 3) $3^{x+2} - 2 \cdot 3^{x-2} = 79$; |
| 4) $3^{x+3} + 3^x = 84$; | 5) $3^{x+3} + 5 \cdot 3^{x-1} - 86 = 0$; | 6) $5^{x+1} + 5^x - 5^{x-1} = 29$. |

3. Розв'яжіть рівняння:

- | | |
|-------------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$; | 2) $9^x + 2 \cdot 3^x - 99 = 0$; |
| 3) $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$; | 4) $4^x - 5 \cdot 2^x - 24 = 0$. |

4. Розв'яжіть рівняння:

- | | |
|-------------------------------------|--|
| 1) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 8 = 0$; | 2) $9^x - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$; |
| 3) $25^x - 5^x - 20 = 0$; | 4) $100 \cdot 0,3^{2x} + 91 \cdot 0,3^x - 9 = 0$. |

5. Розв'яжіть рівняння:

- | | | | |
|--------------------------------|--------------------------|--------------------------------|---------------------------|
| 1) $4^{x^2+2x} = 5^{x^2+2x}$; | 2) $7^{2-x} = 4^{x-2}$; | 3) $2^{x^2-3x} = 5^{x^2-3x}$; | 4) $5^{x-1} = 12^{1-x}$. |
|--------------------------------|--------------------------|--------------------------------|---------------------------|

6. Розв'яжіть рівняння:

- | | |
|---|---|
| 1) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 56$; | 2) $6 \cdot 5^x - 5^{x+1} - 3 \cdot 5^{x-1} = 10$; |
| 3) $4 \cdot 9^{1,5x-1} - 27^{x-1} = 33$; | 4) $0,5^{5-2x} + 3 \cdot 0,25^{3-x} = 5$. |

7. Розв'яжіть рівняння:

- | | |
|--|---|
| 1) $4^{x+1} + 4^x = 320$; | 2) $2 \cdot 3^{x+1} - 3^x = 15$; |
| 3) $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x+1} = 539$; | 4) $3 \cdot 5^{x+3} + 2 \cdot 5^{x+1} = 77$. |

8. Розв'яжіть рівняння:

- | | |
|--|---|
| 1) $3^x - 3^{x+3} = -78$; | 2) $5^{2x-1} - 5^{2x-3} = 4,8$; |
| 3) $7^{2x+1} + 7^{2x+2} + 7^{2x+3} = 57$; | 4) $2^{4x-1} + 2^{4x-2} - 2^{4x-3} = 160$. |

Рівень В

1. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) 2 \cdot 7^x + 7^{x+2} - 3 \cdot 7^{x-1} = 354; & 2) 2^{2x+1} + 4^x - \left(\frac{1}{16}\right)^{1-0,5x} = 47; \\ 3) 4^{x-2} - 3 \cdot 2^{2x-1} + 5 \cdot 2^{2x} = 228; & 4) 4 \cdot 3^x - 5 \cdot 3^{x-1} - 6 \cdot 3^{x-2} = 15 \cdot 9^{x^2-1}. \end{array}$$

2. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{lll} 1) 2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x + 2 = 0; & 2) 4^{x+1} + 4^{1-x} = 10; & 3) 5^{2x-3} - 2 \cdot 5^{x-2} = 3; \\ 4) 9^x - 6 \cdot 3^{x-1} = 3; & 5) 3^{x+1} + 3^{2-x} = 28; & 6) \frac{9}{2^x - 1} - \frac{21}{2^x + 1} = 2. \end{array}$$

3. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{l} 1) 2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2}; \\ 2) 3^{x^2+2} - 5^{x^2-1} = 5^{x^2+1} + 3^{x^2-1}; \\ 3) 7^x - 5^{x+2} = 2 \cdot 7^{x-1} - 118 \cdot 5^{x-1}. \end{array}$$

4. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) 5^{x+2} - 5^x = 120\sqrt{5}; & 2) 4^{x+2} + 2 \cdot 4^x = \frac{9}{16}; \\ 3) 3^{x+2} + 3^{x+3} = 108; & 4) 3 \cdot 2^{2x+1} + 2^{2x-1} = 104. \end{array}$$

5. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) 4^x \cdot 5^{x-1} = 0,2 \cdot 20^{3-2x}; & 2) 2^x \cdot 3^{x+1} = 81; \\ 3) 3^x \cdot 5^{2x-3} = 45; & 4) 2^x \cdot 3^{x-1} \cdot 5^{2x+1} = 250. \end{array}$$

6. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) 9^x - 4 \cdot 3^x = 45; & 2) 2^x - 8 \cdot 2^{-x} = 7; \\ 3) 4^{x-1} - 17 \cdot 2^{x-3} + 1 = 0; & 4) 2 \cdot 4^{x+1} - 17 \cdot 2^x = 2^{-x} - 10. \end{array}$$

7. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) 2^x - 6 \cdot 2^{-x} = -1; & 2) 2^{2x-2} + 5 \cdot 2^{x-1} + 4 = 0; \\ 3) \left(\frac{1}{5}\right)^x + 5^{x+2} = 10; & 4) 2 + \frac{1}{4^x - 3} = \frac{1}{4^x + 2}. \end{array}$$

8. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) 2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 6^{x-1} + 6^x; & 2) 9^{x+\frac{1}{2}} - 2^{x+1} = 2^{x+4} - 3^{2x}; \\ 3) 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 12^x + 12^{x+1}; & 4) 4^{x+\frac{1}{2}} - 3^{x+1} = 3^{x+2} - 7 \cdot 2^{2x}. \end{array}$$

Рівень С

1. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{4^x - 2^x - 3} = \sqrt{4 \cdot 2^x - 7}$.

2. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) 9^{x-\frac{1}{2}} + 3^{x-1} = 3 + 3^{1-x}. & 2) x \cdot 3^{x-1} + 3 \cdot 3^{\sqrt{3-x}} = 3^x + x \cdot 3^{\sqrt{3-x}}; \\ 3) x^2 \cdot 4^{\sqrt{6-x}} + 4^{2+x} = 16 \cdot 2^{2\sqrt{6-x}} + x^2 \cdot 2^{2x}; & 4) x^2 \cdot 6^{-x} + 6^{\sqrt{x+2}} = x^2 \cdot 6^{\sqrt{x}} + 6^{2-x}. \end{array}$$

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $2^{3x} - 6 \cdot 2^{2x} + 12 \cdot 2^x - 8 = 0$;

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} - 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + 48 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 64 = 0$;

3) $5^x + 6 \cdot (\sqrt[3]{25})^x + 12 \cdot (\sqrt[3]{5})^x + 8 = 343$;

4) $2^x + 3 \cdot (\sqrt[3]{4})^x + 3 \cdot (\sqrt[3]{2})^x + 1 = 27$.

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $(3^{2x} - 1) \cdot (3^{4x} + 3^{2x} + 1) = 26$;

2) $(5^{2x} + 1) \cdot (5^{4x} - 5^{2x} + 1) = 126$;

3) $((\sqrt{7})^x - 1) \cdot (7^x + (\sqrt{7})^x + 1) = 342$;

4) $((\sqrt[3]{11})^x + 1) \cdot ((\sqrt[3]{121})^x - (\sqrt[3]{11})^x + 1) = 122$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $(\sqrt{7})^{2x+2} - 50 \cdot (\sqrt{7})^x + 7 = 0$;

2) $(\sqrt{6})^{2x+2} - 37 \cdot (\sqrt{6})^x + 6 = 0$;

3) $3^{x-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{3-x} = \sqrt{\frac{1}{9^{4-x}}} + 207$;

4) $\sqrt[4]{16^{x+1}} + 188 = 8 \cdot 2^x - 0,5^{3-x}$.

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $2^{x^2+2x-6} - 2^{7-2x-x^2} = 3,5$;

2) $3^{2x^2+x} = 26 + 3^{3-x-2x^2}$.

7. Розв'яжіть рівняння:

1) $(19 - 6\sqrt{10})^x + 6 \cdot (\sqrt{10} - 3)^x - 1 = 0$;

2) $(\sqrt{10} - 3)^{4x} - 6 \cdot (19 - 6\sqrt{10})^x - 1 = 0$;

3) $(2 - \sqrt{3})^x + (2 + \sqrt{3})^x - 4 = 0$;

4) $(3 - 2\sqrt{2})^x + (3 + 2\sqrt{2})^x - 6 = 0$.

8. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2^x + 1}{2^{x+2} - 2} = 1$;

2) $\frac{3^{x+1} - 1}{3^x + 4} = 2$;

3) $\frac{5^{4x-1} + 3}{5^{4x} - 3} = 2$;

4) $\frac{7^{2x} - 1}{7^{2x-1} + 1} = 3$.

Рефлексія

Запропонуйте учням оцінити розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Жахливі									Чудові

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася, або у вас усе ще залишилися запитання.

- 1)
- 2)
- ?

Можливі теми проєктів

1. Основні методи розв'язування показникових рівнянь та їхнє порівняння.
2. Графічний метод розв'язування показникових рівнянь.
3. Показникові рівняння як математичні моделі реальних процесів.
4. Типові помилки під час розв'язування показникових рівнянь і способи їхнього уникнення.







