

Урок 8. Урок–практикум. Розв'язування показникових рівнянь

Тип уроку: урок формування умінь і навичок.

План уроку

1. Розв'язування показникових рівнянь різними методами.
2. Розв'язування комбінованих показникових рівнянь.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

визначає межі даних, формулює припущення щодо даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 1.2.3–1 П];

аналізує спільні та відмінні риси різних моделей і шляхів розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1–1 П];

використовує різні форми подання математичних об'єктів відповідно до специфіки проблемної ситуації [12 МАО 4.2.2–2 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на власний розсуд.
- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 6) Заплануйте розв'язання практичної задачі як групову активність.
- 7) Пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

- 8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.
- 9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С.
- 10) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Чи відрізняються методи розв'язування показникових рівнянь та їхніх систем від розв'язування інших рівнянь?
- 2) Які властивості показникових функцій найчастіше допомагають при розв'язуванні показникових рівнянь?
- 3) Чи можна побудувати математичну модель для прогнозу кліматичних змін за допомогою показникових рівнянь?
- 4) Чи завжди показникове рівняння має розв'язки? Від чого це залежить?
- 5) Чому для опису природних процесів часто застосовують експоненціальні залежності?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Розв'яжіть рівняння $\left(1\frac{1}{2}\right)^{x+4} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1-3x}$.
- Відповідь. 2,5.
2. Не виконуючи побудови, знайдіть абсцису точки перетину графіка функції $f(x) = \sqrt{2^x \cdot 7^x}$ і прямої $y = 14$.
- Відповідь. 28.
3. Укажіть множину значень функції $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 3$.
- Відповідь. $E(f) = (3; +\infty)$.
4. Графік функції $f(x) = a^x$ проходить через точку $M(2; 0,04)$. Чому дорівнює a ?
- Відповідь. 0,2.
5. Обчисліть $\left(27^{-\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$.
- Відповідь. $\frac{1}{3}$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Певна біологічна культура зі 100 бактерій розмножується, у сприятливих умовах, за законом $N(t) = N_0 e^{kt}$, де $N(t)$ — кількість бактерій у момент часу t , N_0 — кількість бактерій у початковий момент часу ($t = 0$), k — деяка константа, коефіцієнт уповільнення росту. Через 12 год виявилось, що кількість бактерій досягла 6400 штук. Скільки бактерій буде через дві доби від початку досліду з їхнього розмноження?

III. Розв'язування показникових рівнянь різними методами (5 хв)

Нагадаємо класифікацію показникових рівнянь, яка запропонована в таблиці.

№	Види рівнянь	Приклади
1.	Рівняння, що розв'язуються переходом до рівних основ.	1) $2^x = 4^5$; 2) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{7}{3}\right)^{5x-1}$.
2.	Рівняння, що розв'язуються за допомогою переходу до однакового показника степеня.	1) $5^{2x-4} = 49^{2-x}$; 2) $3^{x^2-9} = 7^{x^2-9}$.
3.	Рівняння, що розв'язуються за допомогою винесення спільного множника за дужки.	1) $5^{x+1} + 5^x = 150$; 2) $2^{x+2} - 2^x = 96$.
4.	Рівняння, що зводяться до алгебричних за допомогою заміни змінних.	1) $7^{2x} - 6 \cdot 7^x + 5 = 0$; 2) $4^x + 2^x = 72$.
5.	Однорідні рівняння, відносно показникових функцій.	1) $3 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 3^{2x} = 0$; 2) $2^{2x+1} - 7 \cdot 10^x + 25^{x+0,5} = 0$.
6.	Рівняння, що розв'язуються графічним методом або за допомогою властивостей функцій.	1) $3^x = 11 - x$; 2) $3^{x-2} = \frac{9}{x}$.

Ілюстративні приклади (8–10 хв)

6. Розв'яжіть рівняння $(2\sqrt{2})^{2\sin x - 1} = 1$.

Розв'язання. $(2\sqrt{2})^{2\sin x - 1} = (2\sqrt{2})^0$, $2\sin x = 1$, $\sin x = \frac{1}{2}$, $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

7. Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{8^{x^2-1}} = 4^x \cdot 0,25$.

Розв'язання. $8^{\frac{x^2-1}{3}} = 4^x \cdot 0,25$, $(2^3)^{\frac{x^2-1}{3}} = (2^2)^x \cdot 2^{-2}$, $2^{x^2-1} = 2^{2x-2}$, $x^2 - 1 = 2x - 2$,
 $x^2 - 2x + 1 = 0$, $(x-1)^2 = 0$, $x - 1 = 0$, $x = 1$.

Відповідь. 1.

8. Розв'яжіть рівняння: $3^{x-2} = \frac{9}{x}$.

Розв'язання. Областю визначення рівняння є множина $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Якщо $x < 0$, то $\frac{9}{x} < 0$, а $3^{x-2} > 0$ і рівняння коренів не має.

Якщо $x > 0$, то функція $y = 3^{x-2}$ зростає, а функція $y = \frac{9}{x}$ спадає. Це означає, що

рівняння $3^{x-2} = \frac{9}{x}$ не може мати більше одного кореня на цьому проміжку. Мето-

дом підбору встановлюємо, що $x = 3$ є коренем.

Відповідь. 3.

IV. Розв'язування комбінованих показникових рівнянь

Для розв'язування більш складних показникових рівнянь найчастіше використовують метод заміни змінних.

Якщо всі члени рівняння, у лівій і правій частинах, якого містяться багаточлени від двох змінних (або від двох функцій однієї змінної) мають однаковий сумарний степінь, то рівняння називається *однорідним*.

Наприклад, розглянемо рівняння $4^x + 3 \cdot 6^x - 4 \cdot 9^x = 0$.

Усі степені в цьому рівнянні можна подати, як степені з основами 2 і 3, оскільки $4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$, $9^x = (3^2)^x = 3^{2x}$, $6^x = (2 \cdot 3)^x = 2^x \cdot 3^x$.

Отримаємо рівняння $2^{2x} + 3 \cdot 2^x \cdot 3^x - 4 \cdot 3^{2x} = 0$.

Усі добутки, розташовані в лівій частині цього рівняння, мають однаковий степінь 2.

Розв'язують однорідне рівняння діленням обох його частин на найбільший степінь однієї з основ.

Наприклад, якщо розділити обидві частини рівняння на $3^{2x} \neq 0$, то отримаємо $\frac{2^{2x}}{3^{2x}} + \frac{3 \cdot 2^x \cdot 3^x}{3^{2x}} - \frac{4 \cdot 3^{2x}}{3^{2x}} = 0$ або після скорочення $\frac{2^{2x}}{3^{2x}} + 3 \cdot \frac{2^x}{3^x} - 4 = 0$.

В останньому рівнянні $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x - 4 = 0$ можна ввести заміну $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$.

Ілюстративний приклад

9. Розв'яжіть рівняння $\frac{6}{3^x} - \frac{4}{3^x + 1} = 1$.

Розв'язання. Уведемо заміну змінної $3^x = t$, $t > 0$, отримаємо $\frac{6}{t} - \frac{4}{t+1} = 1$.

Тоді $6(t+1) - 4t = t(t+1)$; $t^2 - t - 6 = 0$.

Звідси $t_1 = -2$, $t_2 = 3$. Оскільки $t > 0$, то корінь -2 є стороннім.

Отже, $3^x = 3$, $x = 1$.

Відповідь. 1.

V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Певна біологічна культура зі 100 бактерій розмножується, у сприятливих умовах, за законом $N(t) = N_0 e^{kt}$, де $N(t)$ — кількість бактерій у момент часу t , N_0 — кількість бактерій у початковий момент часу ($t = 0$), k — деяка константа, коефіцієнт уповільнення росту. Через 12 год виявилось, що кількість бактерій досягла 6400 штук. Скільки бактерій буде через дві доби від початку досліду з їхнього розмноження?

Розв'язання.

1. Оскільки $N(t) = N_0 e^{kt}$, то $N(12) = 100 \cdot e^{12k}$.

За умовою, $N(12) = 6400$, тоді:

$$6400 = 100 \cdot e^{12k}, \quad e^{12k} = 64, \quad (e^{2k})^6 = 64, \quad e^{2k} = 2^6.$$

2. Через дві доби: $N(48) = 100 \cdot e^{48k} = 100 \cdot (e^{2k})^{24} = 100 \cdot (2^6)^{24} = 100 \cdot 2^{144}$ (бактерій).

Відповідь. $100 \cdot 2^{144}$ бактерій.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \left(\frac{1}{9}\right)^{2x-3} = 3^{5x-1}; \quad 2) \left(\frac{5}{6}\right)^{1-2x} = \left(\frac{6}{5}\right)^{2-x}; \quad 3) 9^{-x} = 27; \quad 4) 3^{8-2x} = 1.$$

2. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 2^{x+2} + 2^x = 5; \quad 2) 3^{x+2} + 3^x = 30; \quad 3) 5^{x+1} - 3 \cdot 5^{x-2} = 122; \quad 4) 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 69.$$

3. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 9^x - 2 \cdot 3^x = 63; \quad 2) 9^x - 6 \cdot 3^x - 27 = 0; \\ 3) 4^x - 14 \cdot 2^x - 32 = 0; \quad 4) 4^x - 3 \cdot 2^x = 40.$$

4. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x; \quad 2) 3^{2x+4} + 45 \cdot 6^x = 9 \cdot 2^{2x+2}; \\ 3) 18^x - 8 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^x = 0; \quad 4) 12^x - 6^{x+1} + 8 \cdot 3^x = 0.$$

5. Розв'яжіть графічно рівняння:

$$1) \left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 1; \quad 2) \left(\frac{1}{2}\right)^x = x - \frac{1}{2}; \quad 3) 2^x = -x - \frac{7}{4}; \quad 4) 3^x = 11 - x.$$

6. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 5^{2x} + 4 \cdot 5^x - 5 = 0; \quad 2) 6^{2x} - 5 \cdot 6^x - 6 = 0; \quad 3) 3^{2x} - 2 \cdot 3^x = 3; \quad 4) 49^x - 6 \cdot 7^x - 7 = 0.$$

7. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{8}{5^x - 3} - \frac{6}{5^x + 1} = 3; \quad 2) \frac{6}{4^x - 2} - \frac{5}{4^x + 1} = 2.$$

8. Розв'яжіть рівняння:

1) $2^x + 2^{2-x} = 5$; 2) $3^x + 3^{2-x} = 10$; 3) $2^{x+1} + 4^x = 80$; 4) $\frac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}} = 2$.

Рівень В

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $3^{\frac{6x-3}{x}} = \sqrt[4]{27^{2x-1}}$; 2) $5^{\frac{6x+3}{x}} = \sqrt[4]{125^{2x+1}}$; 3) $10^{2x} = 0,1 \cdot \sqrt{1000}$; 4) $2^{3x-1} = \sqrt[4]{256^x}$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $4 \cdot 9^{1,5x-1} - 27^{x-1} = 33$; 2) $4^{\frac{x}{2}-2} + 2^{x-5} - 2^{x-7} = 704$;
3) $5^{x-1} + 1 = 25^{\frac{x}{2}-1} + 5$; 4) $0,2^{3-2x} + 3 \cdot 0,04^{2-x} = 8$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$; 2) $5^x - 0,2 \cdot 5^{\frac{x-3}{2}} = 0$;
3) $5^x - 0,2^{x-1} = 4$; 4) $2^{x+1} + 0,5^{x-1} = 5$.

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $9^x + 6^x = 2^{2x+1}$; 2) $25^{2x+6} + 16 \cdot 4^{2x+4} = 20 \cdot 10^{2x+5}$;
3) $5 \cdot 3^{2x} + 15 \cdot 5^{2x-1} = 8 \cdot 15^x$; 4) $4^{\frac{1}{x}} + 6^{\frac{1}{x}} = 2 \cdot 9^{\frac{1}{x}}$.

5. Установіть при яких значеннях параметра a має корені рівняння:

1) $2^x = a$; 2) $\sqrt[3]{3^x} = -a$; 3) $8^{3x+1} = a + 3$; 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = a^2$.

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $7^x = 9^x$; 2) $5 \cdot 3^x - 3 \cdot 5^x = 0$;
3) $2^{x+3} - 3^x = 3^{x+1} - 2^x$; 4) $4^{x+1} + 4 \cdot 3^x = 3^{x+2} - 4^x$.

7. Розв'яжіть рівняння:

1) $2^{2x} + 2^x \cdot 5^x - 2 \cdot 5^{2x} = 0$; 2) $3^{2x} + 2 \cdot 3^x \cdot 7^x - 3 \cdot 7^{2x} = 0$;
3) $4^x = 3 \cdot 49^x - 2 \cdot 14^x$; 4) $4 \cdot 9^x - 7 \cdot 12^x + 3 \cdot 16^x = 0$.

8. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $2^x = 3 - x$; 2) $3^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x + 3$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 1$.

Рівень С

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $4^{x-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2+3x-1}$; 2) $27^{|x^2-2|} = 81$; 3) $\left(\cos \frac{\pi}{6}\right)^{2x-2} = 1\frac{7}{9}$; 4) $\left(\sin \frac{5\pi}{6}\right)^{3x-4} = \sqrt{8}$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $9^x - 2^{\frac{x+\frac{1}{2}}{2}} = 2^{\frac{x+\frac{7}{2}}{2}} - 3^{2x-1}$; 2) $4^x - 3^{\frac{x+\frac{1}{2}}{2}} = 3^{\frac{x+\frac{3}{2}}{2}} - 7 \cdot 2^{2x-1}$;
3) $5^{x-1} - 27 \cdot 0,04^{2-x} - 17 \cdot 3^{2x-4} - 3^{2x} = 0$; 4) $2^{3x+1} + 0,25^{\frac{1-3x}{2}} - 4^{\frac{3x}{2}} = 192$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $5^{x^3+1} - 5^{1-x^3} = 24$;

3) $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3$;

2) $2^{\sin^2 x} + 5 \cdot 2^{\cos^2 x} = 7$;

4) $\sqrt[3]{49^x} + 1 = 50\sqrt[3]{7^{x-3}}$.

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $5^{2x^2-1} - 3 \cdot 5^{(x+1)(x+2)} = 2 \cdot 5^{6(x+1)}$;

2) $3^{2x^2-1} - 3^{(x-1)(x+5)} = 2 \cdot 3^{8(x-1)}$.

5. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $2^x = 3 - 2x - x^2$;

2) $3^{-x} = \sqrt{x}$;

3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = -\frac{3}{x}$;

4) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x^3 - 1$.

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 6^{x-1} + 6^x$;

2) $9^{x+\frac{1}{2}} - 2^{x+1} = 2^{x+4} - 3^{2x}$.

7. Розв'яжіть рівняння:

1) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 12^x + 12^{x+1}$;

2) $4^{x+\frac{1}{2}} - 3^{x+1} = 3^{x+2} - 7 \cdot 2^{2x}$.

8. Розв'яжіть рівняння:

1) $8^{1+x^2} - 8^{1-x^2} = 63$;

2) $3^{2+x^2} - 3^{2-x^2} = 24$;

3) $9^x - 2 \cdot 4^x + 6^x = 0$;

4) $25^x + 3 \cdot 10^x - 4 \cdot 4^x = 0$.

VII. Рефлексія. «Плюс-Мінус-Цікавинка» (1–2 хв)

(+) що було зрозумілим:

(–) що залишилося незрозумілим:

(?) що здивувало або зацікавило:

Можливі теми проєктів

1. Створення лепбуку «Розв'язування показникових рівнянь та їхніх систем».
2. Графічний метод розв'язування показникових рівнянь з параметрами.
3. Використання комп'ютерних засобів для розв'язування показникових рівнянь та їхніх систем.
4. Застосування нерівностей при розв'язуванні показникових рівнянь.
5. Показникові рівняння в задачах математичного моделювання.

Список використаних джерел

1) Істер О. С. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підручн. для 11-го класу закладів загальної середньої освіти / О. С. Істер. — Київ : Генеза, 2019. — 304 с. : іл.