

Урок 9. Розв'язування систем показникових рівнянь. Розв'язування показникових рівнянь з параметрами

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

навчитеся розв'язувати системи показникових рівнянь, за властивостями показникової функції;

удосконалисте вміння розв'язувати показникові рівняння алгебричними методами;

навчитеся обирати раціональний метод розв'язування показникових рівнянь залежно від їхнього вигляду;

навчитеся досліджувати та розв'язувати показникові рівняння з параметрами.

II. Повторення

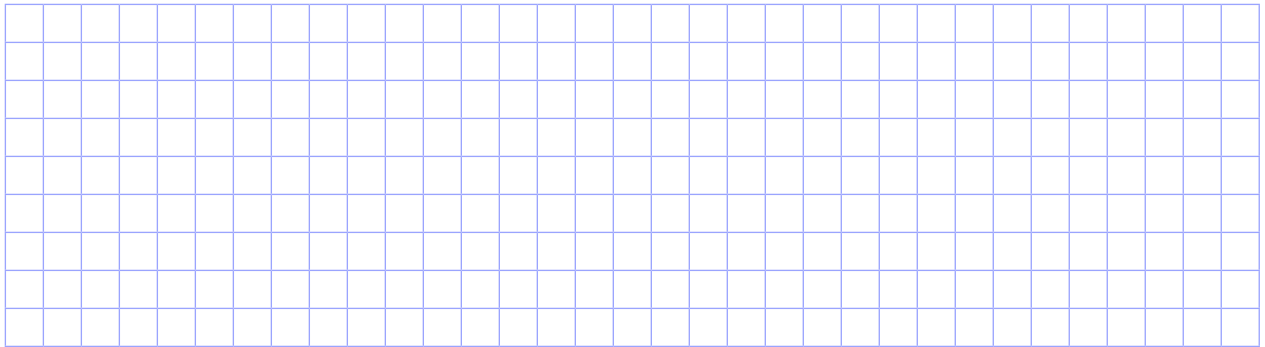
1. Розв'яжіть рівняння $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1,5$.
2. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x + y = 3, \\ xy + x^2 = 3. \end{cases}$
3. Знайдіть область визначення функції $f(x) = \frac{\sqrt[4]{7-2x}}{4^x - 16}$?
4. Розв'яжіть рівняння $4^x - 14 \cdot 2^x = 32$.
5. Обчисліть: $81^{0,25} - 9^{0,5} - (0,2)^{-2}$.

III. Розв'язування систем показникових рівнянь

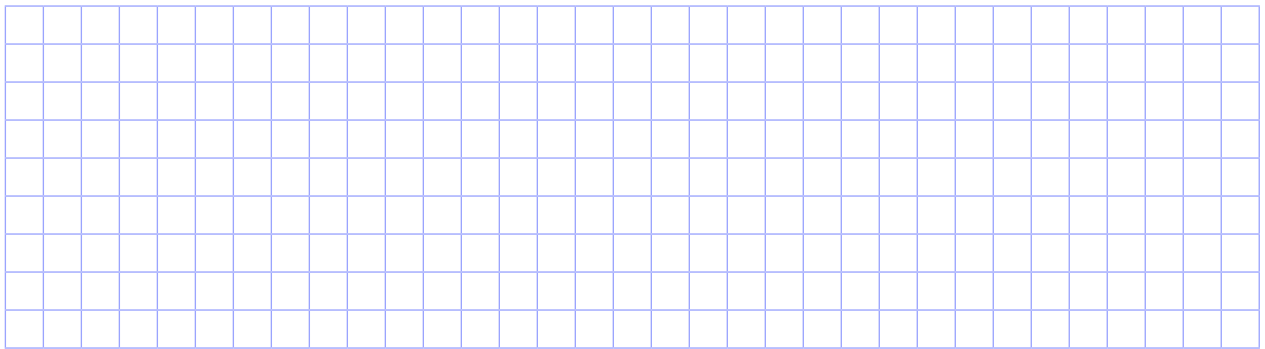
При розв'язуванні систем показникових рівнянь використовують методи, аналогічні методам розв'язування систем алгебричних рівнянь, а саме: метод підстановки, ме-

тод додавання рівнянь системи, метод множення рівнянь системи, метод заміни змінних тощо. Проілюструємо деякі з методів на конкретних прикладах.

Приклад 1. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} 6^{3x-y} = \sqrt{6}, \\ 2^{y-2x} = \sqrt{2^{-1}}. \end{cases}$$



Приклад 2. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 24, \\ 2^y \cdot 3^x = 54. \end{cases}$$



Приклад 3. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} 7^{2x} - 7^x \cdot y = 28, \\ y^2 - y \cdot 7^x = -12. \end{cases}$$

Розв'язання. Додамо рівняння системи:

$$7^{2x} - 2 \cdot 7^x \cdot y + y^2 = 16, \quad (7^x - y)^2 = 16. \quad \text{Звідки } 7^x - y = 4 \text{ або } 7^x - y = -4.$$

1) Якщо $7^x - y = 4$, то $y = 7^x - 4$.

Підставимо вираз для y у перше рівняння системи: $7^{2x} - 7^x(7^x - 4) = 28$.

$$7^{2x} - 7^{2x} + 4 \cdot 7^x = 28, \quad 4 \cdot 7^x = 28, \quad 7^x = 7, \quad x = 1. \quad \text{Тоді } y = 7 - 4 = 3.$$

2) Якщо $7^x - y = -4$, то $y = 7^x + 4$.

Підставимо вираз для y у перше рівняння системи:

$$7^{2x} - 7^x(7^x + 4) = 28, \quad 7^{2x} - 7^{2x} - 4 \cdot 7^x = 28, \quad -4 \cdot 7^x = 28, \quad 7^x = -7.$$

Рівняння не має розв'язків.

Відповідь. (1; 3).

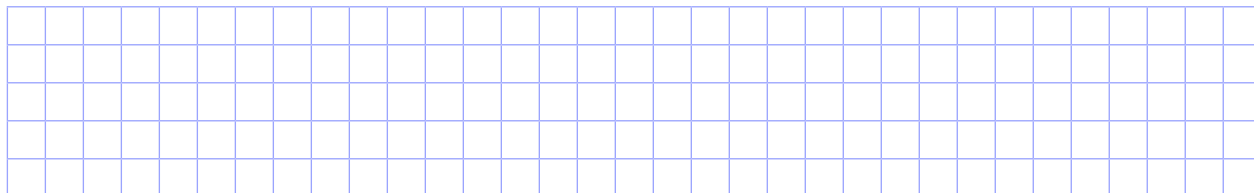
IV. Розв'язування показникових рівнянь алгебричними методами (2 хв)

Алгебричні методи розв'язування рівнянь — це способи знаходження розв'язків рівнянь за допомогою алгебричних перетворень.

Наведемо орієнтовний перелік цих методів.

1. Зведення рівняння до однієї основи, користуючись алгебричними перетвореннями: «перенесенням» доданків із однієї частини рівняння в іншу, зведенням подібних доданків, розкриттям дужок, використанням властивостей степенів тощо.
2. Застосування методу розкладання виразів, які утворюють рівняння, на множники.
3. Застосування методу заміни змінних. Зокрема, зведення показникових рівнянь до квадратних чи дробово-раціональних рівнянь та зведення показникових рівнянь до однорідних.

Приклад 4. Розв'яжіть рівняння $9^x - 2^{x-0,5} = 0,4(2^{x+0,5} + 3^{2x})$.



V. Розв'язування показникових рівнянь з параметрами

Для розв'язування показникових рівнянь, що містять параметри, застосовують ті самі методи, що й для рівнянь загального виду, а саме: використання властивостей показникової функції, метод заміни змінної, зведення до спільної основи, розклад на множники та аналіз області допустимих значень. Особливу увагу приділяють дослідженню кількості розв'язків залежно від значень параметра.

Приклад 5. При яких значеннях параметра a рівняння $9^x - (4a + 2) \cdot 3^x - 5a^2 + 34a - 24 = 0$ має два різних розв'язки?

Розв'язання. Нехай $3^x = t > 0$. Тоді рівняння набуде вигляду
 $t^2 - 2(2a + 1)t - 5a^2 + 34a - 24 = 0$.

Знайдемо дискримінант квадратного рівняння:

$$\frac{D}{4} = (2a + 1)^2 + 5a^2 - 34a + 24 = (3a - 5)^2.$$

Отже, корені рівняння:

$$t_1 = 2a + 1 - (3a - 5) = 6 - a;$$

$$t_2 = 2a + 1 + (3a - 5) = 5a - 4.$$

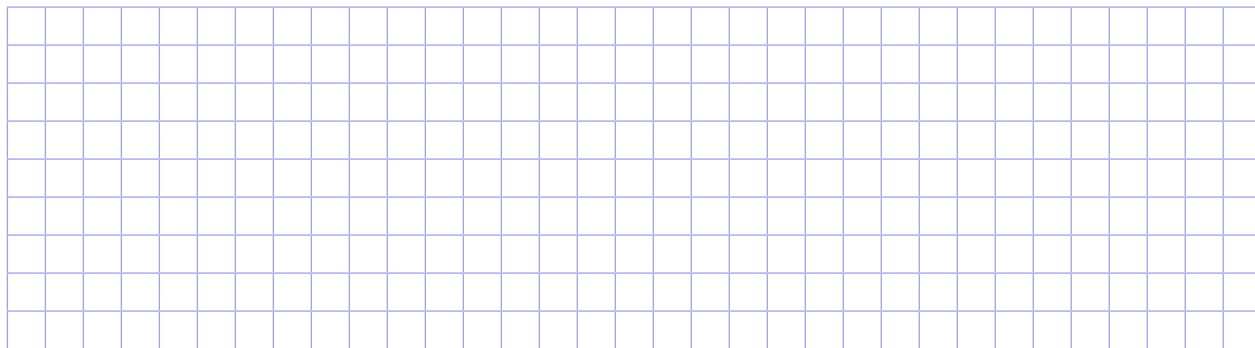
Щоб початкове рівняння мало два різних корені, потрібне виконання умов:

$$\begin{cases} t_1 \neq t_2, \\ t_1 > 0, \\ t_2 > 0, \end{cases} \begin{cases} 6 - a \neq 5a - 4, \\ 6 - a > 0, \\ 5a - 4 > 0, \end{cases} \begin{cases} a \neq \frac{5}{3}, \\ a < 6, \\ a > \frac{4}{5}. \end{cases}$$

$$\text{Отже, } a \in \left(\frac{4}{5}; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}; 6\right).$$

$$\text{Відповідь. } a \in \left(\frac{4}{5}; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}; 6\right).$$

Приклад 6. Знайдіть усі параметра a , при яких рівняння $4^x - a \cdot 2^x - a + 3 = 0$ має хоча б один розв'язок.



VI. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Лаборант досліджує певну культуру бактерій, яка складається з бактерій двох видів. На початку дослідження було по 1000 бактерій кожного виду. Бактерії першого виду подвоюються кожні 3 години, а бактерії другого — кожні 6 годин. Лаборанту потрібно визначити, через скільки годин бактерій першого виду буде на 56000 більше, ніж другого виду.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $2^{2x} + 2^x \cdot 5^x - 2 \cdot 5^{2x} = 0$;

2) $4^x + 3 \cdot 49^x - 2 \cdot 14^x = 0$.

3) $3^{2x} + 2 \cdot 3^x \cdot 7^x - 3 \cdot 7^{2x} = 0$;

4) $4 \cdot 9^x - 7 \cdot 12^x + 3 \cdot 16^x = 0$.

2. Розв'яжіть систему рівнянь:

1)
$$\begin{cases} 2^{x+1} \cdot 3^{y+2} = 2, \\ x - y = 2; \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} 2^x \cdot 9^y = 648, \\ 3^x \cdot 4^y = 432. \end{cases}$$

3. Розв'яжіть систему рівнянь:

1)
$$\begin{cases} 27^{2x-1} = 243 \cdot 3^{4y+2}, \\ 3 \cdot 3^{x+y} = \sqrt{81^{2y-1}}; \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} 7^{\frac{1}{3}(x+y)} = 2401, \\ 6^{\frac{x}{2} + \frac{y}{3}} = 1296. \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} x - y = 2, \\ 3^x - 3^y = 24; \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} 5^x - 6^y = 589, \\ 5^{\frac{x}{2}} + 6^{\frac{y}{2}} = 31. \end{cases}$$

4. Розв'яжіть систему рівнянь:

1)
$$\begin{cases} 4^{x+y} = 16, \\ 5^{x+2y-1} = 1; \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} 3^{2y-x} = \frac{1}{81}, \\ 3^{x-y+2} = 27; \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} x + y = 3, \\ 2^x + 2^y = 6; \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} x - y = 2, \\ 3^x - 3^y = 24. \end{cases}$$

5. Розв'яжіть систему рівнянь:

1)
$$\begin{cases} 3^{x+y} = 27, \\ 4^{x-y} = 0,25; \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} 3^{2x-y} = 3, \\ 2^x + 2^y = 12. \end{cases}$$

6. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + y = 5, \\ 4^x + 4^y = 80; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2^{2x} + 2^x \cdot y = 10, \\ y^2 + y \cdot 2^x = 15. \end{cases}$$

7. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} 2^{x+y} = 16, \\ 3^y = 27^x; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 5^{2x-y} = 125, \\ 4^{x-y} = 4; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 0,5^{3x} \cdot 0,5^y = 0,5, \\ 2^{3x} \cdot 2^{-y} = 32; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 0,6^{x+y} \quad 0,6^x = 0,6, \\ 10^x \cdot 10^y = (0,01)^{-1}. \end{cases}$$

8. За якого найбільшого значення a рівняння $3^x + (4a^2 + 10a) \cdot 3^{-x} = 4a + 5$ не має коренів? (Демонстраційний варіант НМТ, 2026 р.).

Рівень В

1. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} 3^{2x} - 5^y = -16, \\ 3^x - 5^{y/2} = -2; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 64^{2x} + 64^{2y} = 12, \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2}; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3 \cdot 2^x - 2^{x+y+2} = 0, \\ 5 \cdot 2^{x+1} - 2^{x+y-1} = 16; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \left((\sqrt[9]{5})^{2x} \right)^{3y} = 5^8, \\ \left(7777^{(x-y-1)} \right)^{x^2+6y^2-60} = 1. \end{cases}$$

2. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \left(\frac{3}{2} \right)^{x-y} - \left(\frac{2}{3} \right)^{x-y} = \frac{65}{36}, \\ xy - x + y = 118. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2^x + 2^y = 12, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

3. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} 5^x - 6^y = 589, \\ 5^{\frac{x}{2}} + 6^{\frac{y}{2}} = 31; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^{y^2-15y+56} = 1, \\ y - x = 5. \end{cases}$$

4. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} (\sqrt{3})^{x+2y} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{27}, \\ 0,1^x \cdot 10^{3y} = 10; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} (\sqrt{5})^{2x+y} = \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{5}, \\ \left(\frac{1}{5} \right)^x \cdot 5^y = 125. \end{cases}$$

5. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sqrt{3^{x-1}} \cdot \sqrt{9^y} = 27, \\ 2^{2x+y} : 2^x = 64; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sqrt{6^{x-2y}} : \sqrt{6^x} = \frac{1}{6}, \\ \left(\frac{1}{3} \right)^{2x-y} \cdot 3^{x-2y} = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

6. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} 25^{2x} + 25^{2y} = 30, \\ 25^{x+y} = 5\sqrt{5}. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 9^y \cdot 100^{\frac{1}{x}} = 2,7, \\ 25^y \cdot 10^{\frac{4}{x}} = \frac{5}{4}. \end{cases}$$

7. При яких значеннях параметра a рівняння $9^x - (a + 1) \cdot 3^x + 3a - 6 = 0$ має єдиний корінь?
8. При яких значеннях параметра a рівняння $25^x + 5^{x+1} - a^2 + a + 6 = 0$ не має коренів?

Рівень С

1. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x \cdot 2^{x-y+1} + 3y \cdot 2^{2x+y} = 2, \\ 2x \cdot 2^{2x+y} + 3y \cdot 8^{x+y} = 1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 11^{xz} - 2 \cdot 5^y = 71, \\ 11^z + 2 \cdot 5^{y/2} = 21, \\ 11^{(x-1)z+5^{y/2}} = 16. \end{cases}$$

2. Знайдіть $x^2 - y^2$, де $(x; y)$ — розв'язок системи $\begin{cases} 4^{1+\sqrt{x+3}} + 2(y-4)^2 = 2a-4, \\ (y-4)^2 - 4^{\sqrt{x+3}} = 7-2a. \end{cases}$

3. Знайдіть xy , де $(x; y)$ — розв'язок системи $\begin{cases} (x+2)^2 + 2 \cdot 3^{|y-2|} = a-1, \\ 3^{1+|y-2|} - (x+2)^2 = 4a-9. \end{cases}$

4. Знайдіть усі значення параметра a при яких система не має розв'язків:

$$1) \begin{cases} 3 \cdot 5^{y^2} + 2|x| = 21 - a, \\ 5^{1+y^2} - 3|x| = 11a + 16; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 7^{x+1} + 2y^2 = 3a + 31, \\ 2 \cdot 7^x - 7y^2 = 16a - 29. \end{cases}$$

5. Задано систему рівнянь $\begin{cases} ax^2 + 3ax + 4^{1+\sqrt{y}} = 8, \\ x + 2 \cdot 4^{\sqrt{y}} = 1, \end{cases}$ де x, y — змінні, a — довільна стала.

Визначте всі розв'язки заданої системи залежно від значень a .

6. При яких значеннях параметра a рівняння $(\sqrt{x} - a)(3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3) = 0$ має два різних корені?
7. При яких значеннях параметра a рівняння $2^{|x|} = ax^2 + a^2$ має єдиний розв'язок?
8. При яких значеннях параметра a рівняння $\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|} = \left(a + \frac{1}{3}\right)x^2 + a^2$ має єдиний розв'язок?

Рефлексія

- 1) На уроці я дізнався/дізналася
- 2) Мені найбільше запам'яталося
- 3) Для мене було найцікавішим

- 4) Для мене було найскладнішим
.....
.....
- 5) Я припустився/припустилася помилки
.....
.....
- 6) Я хочу повторити, аби краще зрозуміти
.....
.....
- 7) Поради собі до наступного уроку
.....
.....

Можливі теми проєктів

- 1.** Моделювання росту популяцій з різною швидкістю розвитку.
- 2.** Порівняння вкладів на різних банківських рахунках.
- 3.** Математичне моделювання поширення вірусів.
- 4.** Математичні моделі швидкості розповсюдження забруднювачів навколишнього середовища.
- 5.** Моделювання навчального прогресу при різних стратегіях підготовки за допомогою показникових рівнянь та їхніх систем.







