

Урок 1–2. Похідна функції. Повторення**РОБОЧИЙ АРКУШ**

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) повторите основні поняття та правила теми «Похідна функції»;
- 2) узагальните знання про похідну та її застосування;
- 3) повторите способи обчислення похідних;
- 4) застосуєте похідну для розв'язування задач;
- 5) установите зв'язок між похідною та властивостями функції;
- 6) проаналізуєте отримані результати та зробите висновки.

II. Захист індивідуальних (групових) проєктів**III. Повторення. Похідна функції****1. Похідні елементарних функцій**

Функція	Похідна функція
$y = kx + b$	k
$y = x^n$	$n \cdot x^{n-1}$
$y = \sin x$	$\cos x$
$y = \cos x$	$-\sin x$
$y = \operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$

Функція	Похідна функція
$y = \operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$y = \arcsin x$	$y(-1) = y(1) = -2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$y = \operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

2. Правила обчислення похідних

Значення функцій $f(x)$ та $g(x)$ та їхні похідні у точці x_0 позначимо так:

$$f(x_0) = f, \quad g(x_0) = g, \quad f'(x_0) = f', \quad g'(x_0) = g'.$$

1. Якщо функції f і g диференційовні в точках x_0 , то їхня сума диференційовна в цій точці: $(f + g)' = f' + g'$. Тобто похідна суми дорівнює сумі похідних.
2. Якщо функції f і g диференційовні в точці x_0 , то їхній добуток диференційовний у цій точці й обчислюється за правилом: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$.
3. Якщо функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0 , а C — число (константа), то функція $C \cdot f(x)$ диференційовна в цій точці: $(Cf(x))' = C \cdot f'(x)$.
4. Якщо функції f і g диференційовні в точці x_0 і функція g не дорівнює нулю в цій точці, то їхня частка $\frac{f}{g}$ також диференційовна в цій точці: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.
5. Якщо функція f має похідну в точці x_0 , а функція g має похідну в точці $y_0 = f(x_0)$, то складена функція $h(x) = g(f(x))$ також має похідну в точці x_0 , таку, що

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Означення. Функцію, яка числу x_0 ставить у відповідність число $f''(x_0)$, називають **другою похідною** функції $f(x)$.

IV. Застосування похідної функції

1. Геометричний зміст похідної

Існування похідної функції в точці x_0 — це існування дотичної до графіка функції в точці $(x_0; f(x_0))$. При цьому кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює похідній функції в точці x_0 , тобто числу $f'(x_0)$. У цьому полягає геометричний зміст похідної:

$$k = f'(x_0) = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha.$$

2. Фізичний (механічний) зміст похідної

Миттєва швидкість руху — це відношення приросту шляху до приросту часу (Δt) при умові, що $\Delta t \rightarrow 0$. Тоді $v(t_0) = \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{t}$.

Використовуючи означення похідної маємо, що $s'(t) = v(t)$, де $s(t)$ — рівняння руху матеріальної точки, $v(t)$ — швидкість руху матеріальної точки в момент часу t .

3. Знаходження точок екстремуму

Алгоритм знаходження точок екстремуму функції

1. Знайдіть $f'(x)$.
2. Знайдіть критичні точки функції.
3. Дослідіть знак похідної в околах (ліворуч і праворуч) критичних точок.
4. За допомогою ознак точок максимуму чи мінімуму функції з'ясуйте, чи є критична точка точкою екстремуму.

4. Монотонність функції

Алгоритм знаходження проміжку зростання (спадання) функції

1. Знайдіть похідну функції $f'(x)$.
2. Знайдіть критичні точки. Розв'яжіть рівняння $f'(x) = 0$ і знайдіть точки, у яких похідна не існує.
3. Побудуйте числову пряму. Позначте на ній знайдені критичні точки — вони поділять вісь на кілька інтервалів.
4. Визначте знак похідної на кожному інтервалі. Якщо $f'(x) > 0$ — функція зростає на цьому інтервалі, якщо $f'(x) < 0$, то функція спадає на інтервалі.
5. Запишіть проміжки зростання та спадання. Узагальніть результати у вигляді інтервалів, указавши де функція зростає, а де спадає.

5. Найбільше та найменше значення функції на заданому відрізку

Алгоритм знаходження найбільшою й найменшого значень функції на заданому проміжку $[a; b]$

1. Обчисліть значення заданої функції $f(x)$ на кінцях проміжку $[a; b]$, тобто $f(a)$ і $f(b)$.
2. Знайдіть критичні точки, які належать відрізку $[a; b]$.
3. Обчисліть значення функції $f(x)$ у знайдених критичних точках.
4. З усіх знайдених значень оберіть найбільше й найменше значення.

Алгоритм розв'язування практичних задач на знаходження найбільшого або найменшого значень деякої величини

1. Одну з невідомих величин позначте через x та знайдіть межі значення x . Інші величини виразіть через x .

2. Складіть функцію, яка буде математичною моделлю задачі.
3. Знайдіть найбільше чи найменше значення отриманої функції на заданому проміжку для значень x .
4. Проаналізуйте отриманий результат та запишіть відповідь до задачі.

6. Рівняння дотичної

Загальний вигляд рівняння дотичної: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Щоб скласти рівняння дотичної, потрібно знати три числа:

- 1) x_0 — абсцису точки дотику;
- 2) $f(x_0)$ — значення функції у точці з абсцисою x_0 ;
- 3) $f'(x_0)$ — значення похідної в точці x_0 або кутовий коефіцієнт дотичної.

7. Інтервали опуклості та точки перегину

Алгоритм знаходження інтервалів опуклості та точок перегину графіка функції

1. Знайдіть другу похідну функції.
2. Розв'яжіть рівняння $f''(x) = 0$, корені якого розбивають числову вісь на інтервали.
3. Розв'яжіть нерівності $f''(x) \geq 0$ або $f''(x) \leq 0$ на інтервалах, які визначають знайдені вище точки.
4. З'ясуємо, які зі знайдених точок є точками перегину графіка функції.

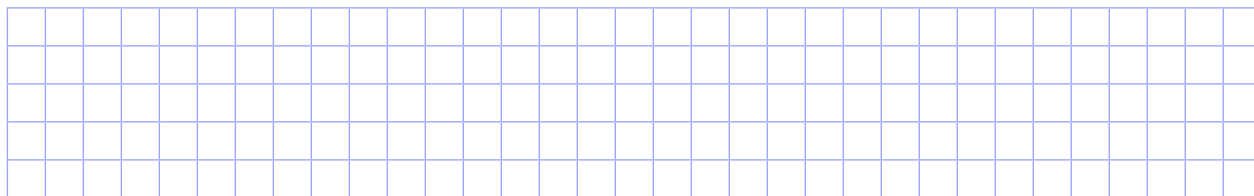
8. Дослідження функцій та побудова графіків функцій

Схема дослідження властивостей функції

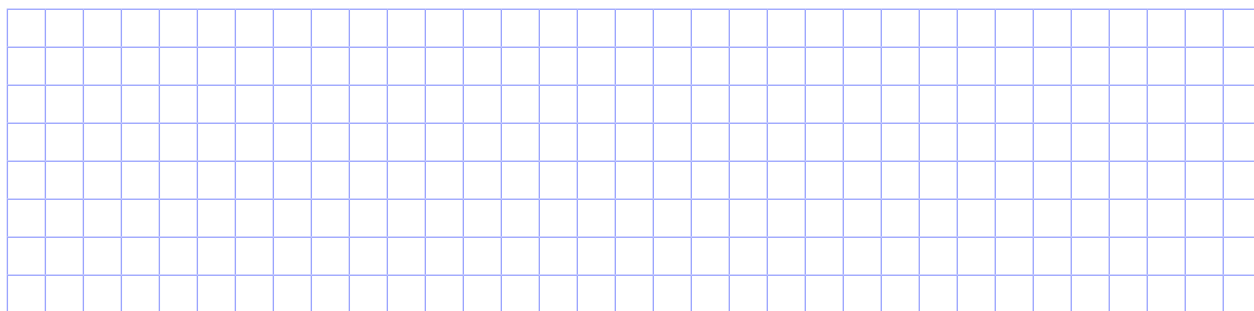
1. Область визначення, тобто множина значень аргументу, при яких задана функція. Графічно — проекція графіка на вісь Ox .
2. Нулі функції — точки, в яких функція перетворюється в 0, або корені рівняння $f(x) = 0$. Графічно — точки перетину з віссю Ox .
3. Проміжки сталого знака, тобто проміжки, на яких функція додатна (від'ємна), або інакше розв'язки нерівності $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$).
Графічно — проміжки осі Ox , що відповідають точкам графіка, які лежать вище (нижче) осі Ox .
4. Парність або непарність функції, тобто виконання рівності $f(-x) = f(x)$ для парної функції та виконання рівності $f(-x) = -f(x)$ для непарної функції.
Графічно — графік парної функції симетричний відносно осі Oy , графік непарної функції симетричний відносно початку координат.
5. Проміжки монотонності, тобто проміжки на яких функція зростає або спадає.
Графічно — проміжки осі Ox , на яких графік прямує вгору або вниз.

6. Точки екстремуму — точки, що належать області визначення, в яких функція приймає найбільше (максимум) або найменше (мінімум) значення порівняно зі значеннями у близьких точках. Графічно — «вершини» або «впадини» на графіку функції.
7. Найбільше й найменше значення функції, порівняно з усіма можливими на відміну від екстремумів, де порівняння ведеться тільки з близькими точками. Графічно — ординати найвищої і найнижчої точок графіку.
8. Опуклість графіка функції — інтервали, на яких графік функції опуклий униз або опуклий угору. Якщо $f''(x) \geq 0$ для всіх $x_0 \in (a; b)$, то функція $y = f(x)$ є опуклою вниз на інтервалі $(a; b)$. Якщо $f''(x) \leq 0$ для всіх $x_0 \in (a; b)$, то функція $y = f(x)$ є опуклою вгору на інтервалі $(a; b)$. Графічно — розміщення графіка функції вище дотичної до графіка функції в точці x_0 (для опуклої вниз), або нижче дотичної (для опуклої вгору).
9. Точки перегину графіка функції — це точки, в яких $f''(x) = 0$. Графічно — точки, в яких графік змінює напрямок опуклості.
10. Область значень функції — множина чисел, які складаються з усіх значень функції. Графічно — проекція графіка на вісь Oy .

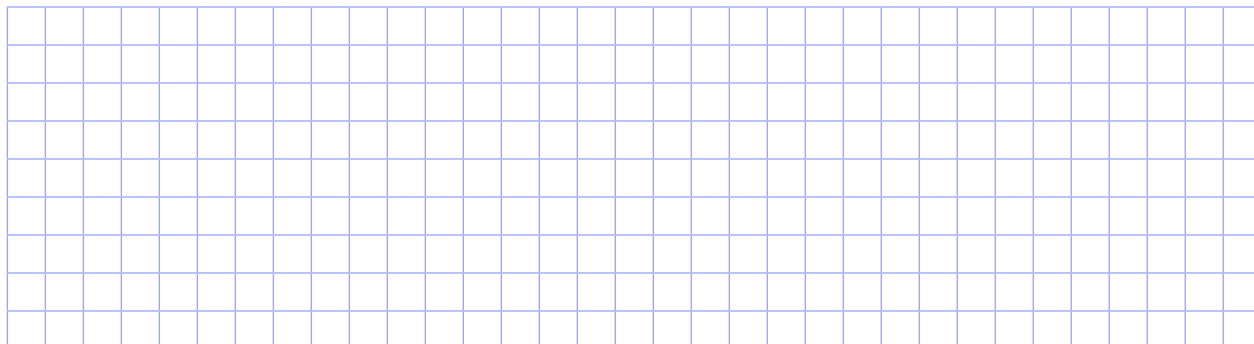
Приклад 1. Обчисліть похідну функції $y = \frac{2x}{\sqrt[3]{3x-2}}$.



Приклад 2. Обчисліть площу трикутника, утвореного осями координат і дотичною до графіка функції $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$ у точці з абсцисою $x_0 = 3$.



Приклад 3. Дослідіть функції $y = 2x^3 + 3x^2$ на монотонність та точки екстремуму.



V. Самостійна робота

Варіант 1

- 1.** Знайдіть похідну функції $y = \frac{1}{x^3} + \sqrt{x}$.

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{3}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\frac{3}{x^4} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\frac{1}{3x^2} + 2\sqrt{x}$	$\frac{3}{x^4} + \frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{3x^2} + \frac{\sqrt{x}}{2}$

[illegible]

- 2.** Рівняння дотичної до параболи $y = 2x^2 - 4x - 1$ має вигляд $y = 8x - 19$. Визначте абсцису точки дотику.

А	Б	В	Г	Д
2	3	4	-4	8

[illegible]

- 3.** Знайдіть критичні точки функції $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$.

А	Б	В	Г	Д
0	-3; 1	-3; 1	1; 3	-1; 3

[illegible]

- 4.** За яких значень параметра a функція $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + ax$ має критичні точки, але не має точок екстремумів?

А	Б	В	Г	Д
-1	-1; 1	1	-4; 4	4

[illegible]

5. Установіть відповідність між функцією (1–4) та її похідною (А–Д).

Функція

1 $y = \frac{x}{5} + 5$

2 $y = 5 - \frac{x}{3}$

3 $y = 3 + 5x$

4 $y = 5 - 3x$

Похідна функції

А $y' = -3$

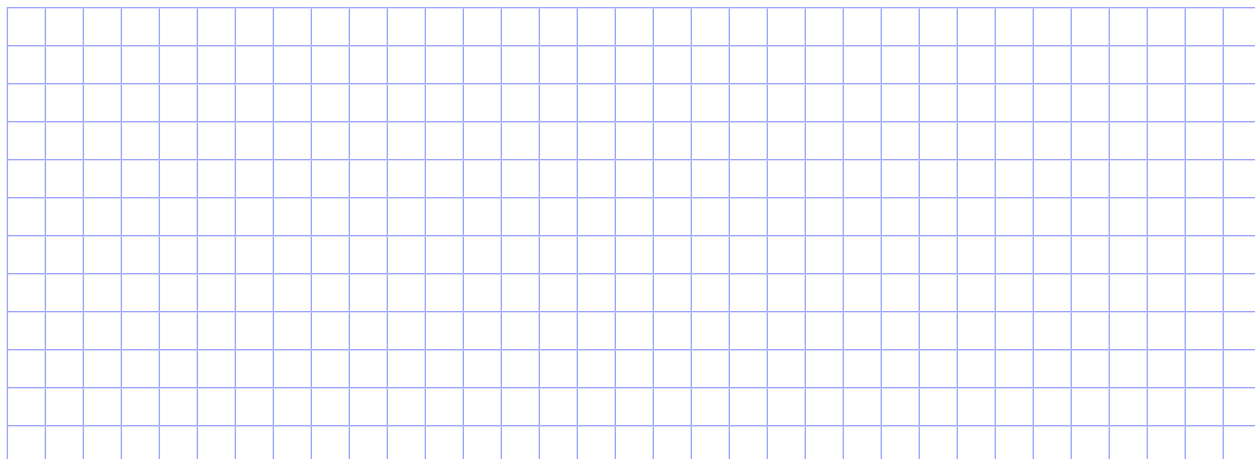
Б $y' = 5$

В $y' = -\frac{1}{3}$

Г $y' = -5$

Д $y' = \frac{1}{3}$

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐



6. Установіть відповідність між функцією (1–4) та її похідною (А–Д).

Функція

1 $y = x \sin 3$

2 $y = 3 \sin x$

3 $y = \sin x^3$

4 $y = \sin^3 x$

Похідна функції

А $y' = 3 \sin^2 x \cos x$

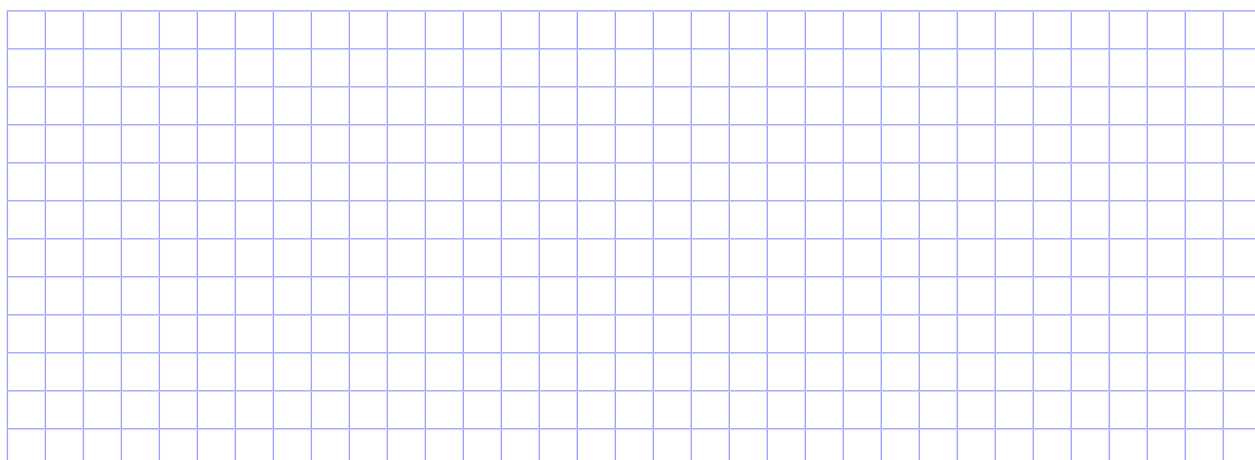
Б $y' = \cos 3$

В $y' = 3x^2 \cos x^3$

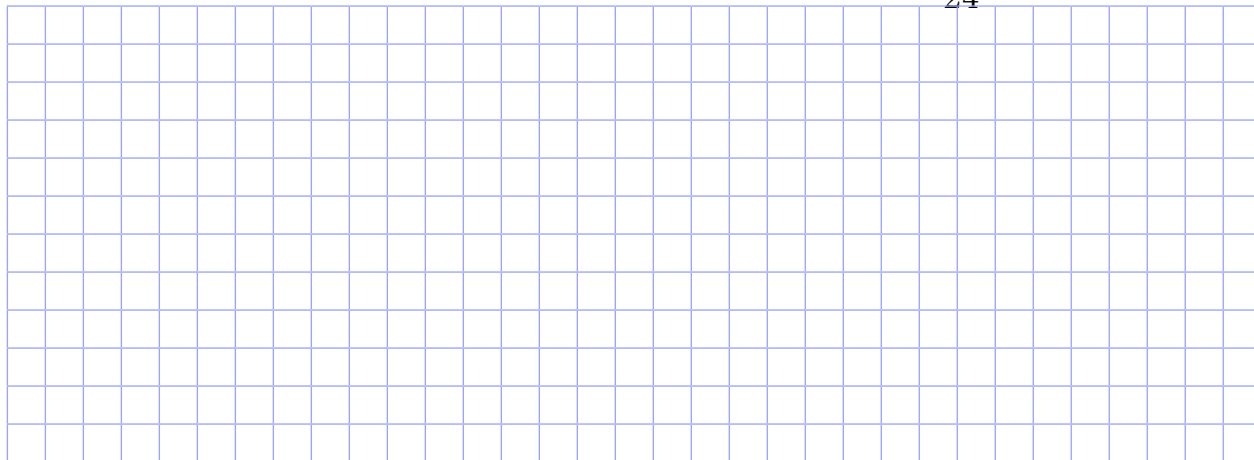
Г $y' = \sin 3$

Д $y' = 3 \cos x$

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐

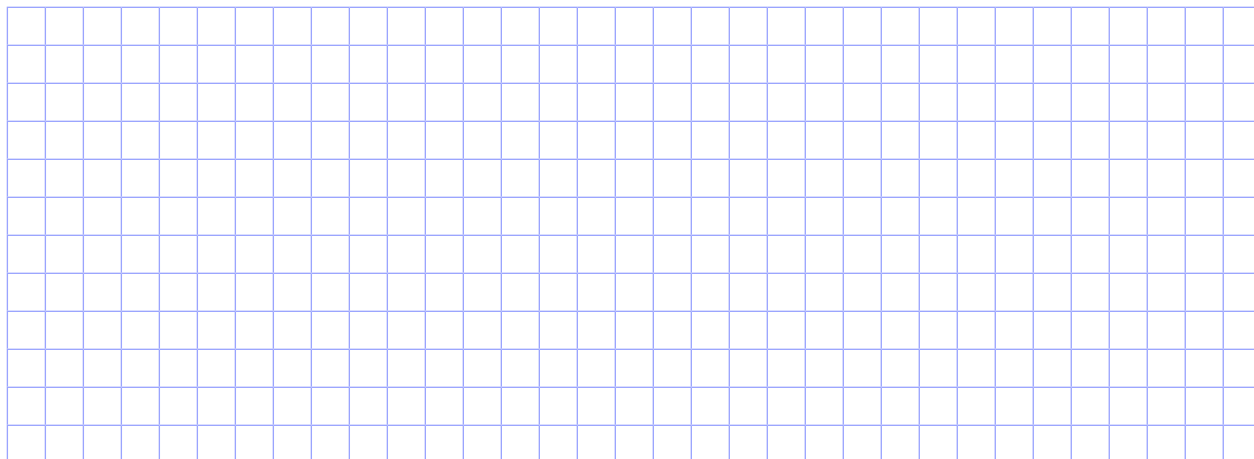


7. Обчисліть значення похідної функції $y = \sqrt{\operatorname{tg} 6x}$ у точці $x_0 = \frac{\pi}{24}$.



Відповідь.

8. Знайдіть проміжки спадання функції $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 5$. У відповідь запишіть абсцису середини одного з проміжків спадання.



Відповідь.

Варіант 2

- 1.** Знайдіть похідну функції $y = 5 \sin 7x - 7x^2 + 7$.

А	Б	В	Г	Д
$5\cos 7x - 14x$	$35\cos 7x - 7x$	$35\cos 7x - 14x$	$7\cos 7x - 7x + 7$	$5\cos 7x - 7x$

[illegible]

- 2.** Складіть рівняння дотичної до графіка функції $y = x^3$ у точці $(2; 8)$.

А	Б	В	Г	Д
$y + 8 = 12(x + 2)$	$y - 8 = \frac{1}{12}(x - 2)$	$y - 8 = x - 2$	$y - 8 = 8(x - 2)$	$y - 8 = 12(x - 2)$

[illegible]

- 3.** Укажіть критичні точки функції $y = x(x - 4)^3$.

А	Б	В	Г	Д
0; 4	4	1; 4	3	1

[illegible]

- 4.** За яких значень параметра a точка 5 є точкою мінімуму функції $y = f(x)$, якщо $f(x) = (x - 5)(x - a)$?

А	Б	В	Г	Д
$a \geq 5$	$a = 5$	$a > 5$	$a \leq 5$	$a < 5$

[illegible]

5. Установіть відповідність між функцією (1–4) та її похідною (А–Д).

Функція

1 $y = 4x^4 - \frac{2}{x^2}$

2 $y = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2x^2}$

3 $y = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{x^2}$

4 $y = 4x^4 - \frac{1}{2x^2}$

Похідна функції

А $y' = x^3 + \frac{1}{x^3}$

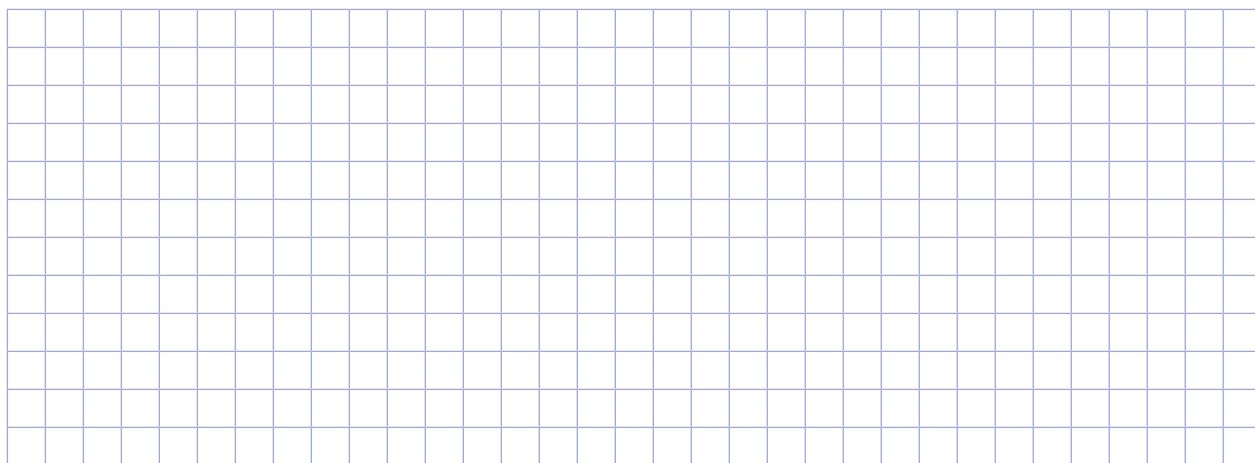
Б $y' = x^3 - \frac{4}{x^3}$

В $y' = 16x^3 + \frac{4}{x^3}$

Г $y' = 16x^3 + \frac{1}{x^3}$

Д $y' = x^3 + \frac{4}{x^3}$

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐



6. Установіть відповідність між функцією (1–4) та її похідною в точці π (А – Д).

Функція

1 $y = \sin \frac{x}{3}$

2 $y = \sin 3x$

3 $y = \frac{\sin x}{3}$

4 $y = \frac{\cos x}{3}$

Похідна функції в точці π

А -3

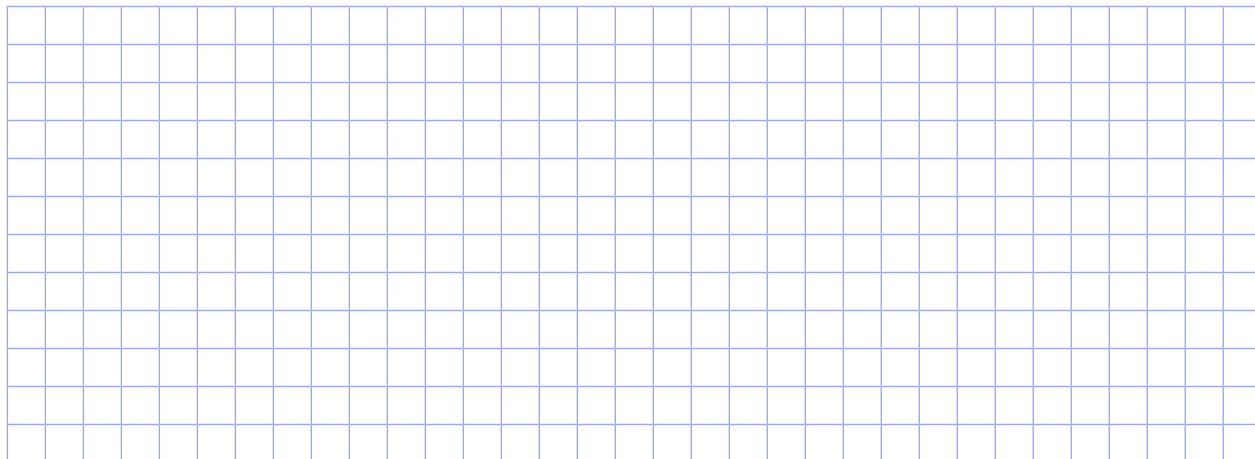
Б $-\frac{1}{3}$

В 0

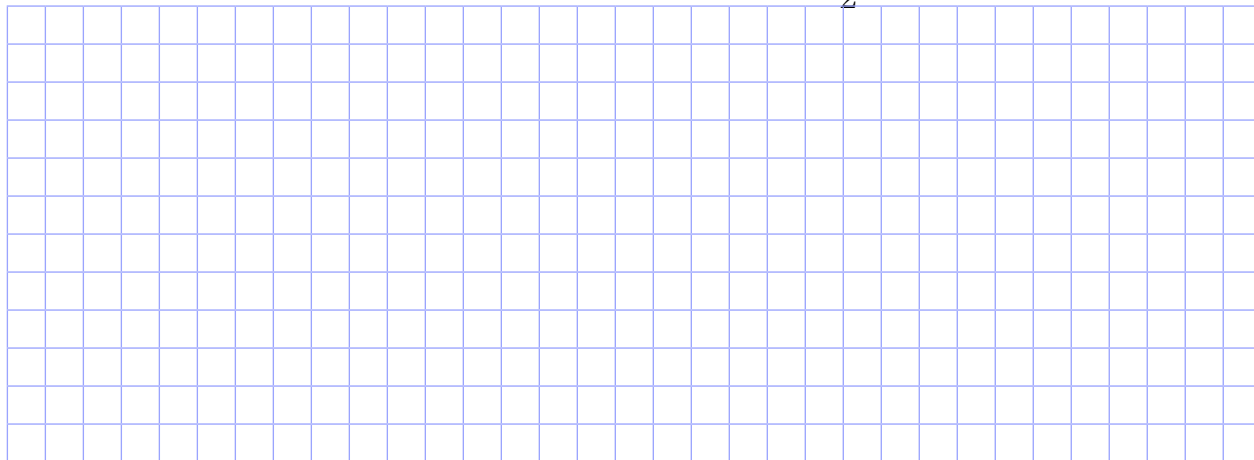
Г $\frac{1}{6}$

Д 1

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐

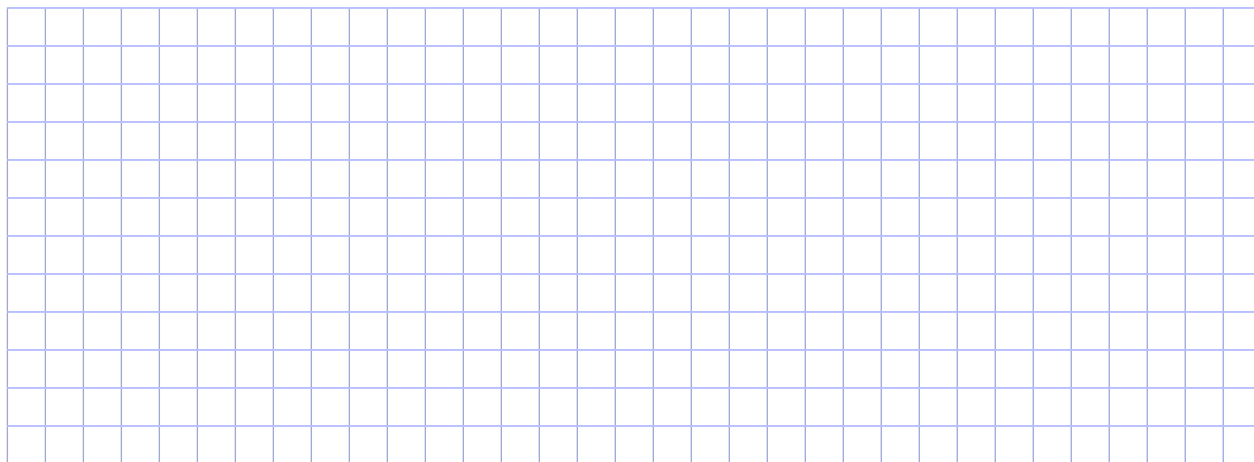


7. Знайдіть похідну функції $y = \sqrt[4]{1 + \cos^3 x}$ у точці $x_0 = -\frac{\pi}{2}$.



Відповідь.

8. Знайдіть проміжки спадання функції $y = \frac{3x + x^2}{x - 1}$. У відповідь запишіть додатну абсцису середини одного з проміжків спадання.



Відповідь.

Рефлексія

Учні/учениці усно або письмово завершують речення.

— Сьогодні я повторив/повторила

— Найважливішим для мене було

— Тепер я вмію

— Найскладнішим для мене було

— Мені ще потрібно попрацювати над

— Поради собі для вивчення наступної теми

