

Тема 5.

Моніторинг навчальних досягнень учнів/учениць

Урок 1–2. Похідна функції. Повторення

Тип уроку: урок повторення та систематизації.

План уроку

1. Похідна функції.
2. Застосування похідної функції.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

висловлює власне ставлення до здобутої інформації та нові ідеї, які виникли в результаті аналізу інформаційних джерел, наводить контраргументи [12 МАО 1.2.1–2 П];

оцінює повноту і достовірність інформації [12 МАО 1.2.1–3 П];

обирає математичну модель розв'язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов [12 МАО 3.2.2–1 П];

аналізує результати дій із математичними об'єктами у процесі розв'язання проблемної ситуації [12 МАО 4.2.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Урок розрахований на дві академічні години. Тому запропонований матеріал розподіліть на два уроки на ваш вибір.
- 2) Теоретичний матеріал, поданий у конспекті уроку, має схематичний та опорний характер. Ви можете самостійно його змінювати, доповнювати або деталізувати залежно від рівня підготовки класу.
- 3) Ілюстративні приклади доцільно пропонувати як тренувальні вправи. Їх можна опрацювати індивідуально, у парах або в групах.
- 4) Роботу над теоретичним матеріалом варто організовувати у формі групової діяльності або фронтального опитування.
- 5) Запропонуйте учням/ученицям виконати завдання тренувального тесту, який може бути формувального або діагностичного характеру.

5) На уроці можна розпочати презентацію та захист індивідуальних або групових проєктів. Наприклад, одна академічна година — узагальнення й систематизація вивченого, а інша — захист учнівських проєктів.

I. Організаційна частина (2–3 хв)

II. Захист індивідуальних (групових) проєктів

III. Повторення. Похідна функції

1. Похідні елементарних функцій

Функція	Похідна функція
$y = kx + b$	k
$y = x^n$	$n \cdot x^{n-1}$
$y = \sin x$	$\cos x$
$y = \cos x$	$-\sin x$
$y = \operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$y = \operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$y = \arcsin x$	$y(-1) = y(1) = -2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$y = \operatorname{arccotg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

2. Правила обчислення похідних

Значення функцій $f(x)$ та $g(x)$ та їхні похідні у точці x_0 позначимо так:

$$f(x_0) = f, \quad g(x_0) = g, \quad f'(x_0) = f', \quad g'(x_0) = g'.$$

1. Якщо функції f і g диференційовні в точках x_0 , то їхня сума диференційовна в цій точці: $(f + g)' = f' + g'$. Тобто похідна суми дорівнює сумі похідних.
2. Якщо функції f і g диференційовні в точці x_0 , то їхній добуток диференційовний у цій точці й обчислюється за правилом: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$.

3. Якщо функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0 , а C — число (константа), то функція $C \cdot f(x)$ диференційовна в цій точці: $(Cf(x))' = C \cdot f'(x)$.
4. Якщо функції f і g диференційовні в точці x_0 і функція g не дорівнює нулю в цій точці, то їхня частка $\frac{f}{g}$ також диференційовна в цій точці: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.
5. Якщо функція f має похідну в точці x_0 , а функція g має похідну в точці $y_0 = f(x_0)$, то складена функція $h(x) = g(f(x))$ також має похідну в точці x_0 , таку, що

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Означення. Функцію, яка числу x_0 ставить у відповідність число $f''(x_0)$, називають **другою похідною** функції $f(x)$.

IV. Застосування похідної функції

1. Геометричний зміст похідної

Існування похідної функції в точці x_0 — це існування дотичної до графіка функції в точці $(x_0; f(x_0))$. При цьому кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює похідній функції в точці x_0 , тобто числу $f'(x_0)$. У цьому полягає геометричний зміст похідної:

$$k = f'(x_0) = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha.$$

2. Фізичний (механічний) зміст похідної

Миттєва швидкість руху — це відношення приросту шляху до приросту часу (Δt) при умові, що $\Delta t \rightarrow 0$. Тоді $v(t_0) = \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{t}$.

Використовуючи означення похідної маємо, що $s'(t) = v(t)$, де $s(t)$ — рівняння руху матеріальної точки, $v(t)$ — швидкість руху матеріальної точки в момент часу t .

3. Знаходження точок екстремуму

Алгоритм знаходження точок екстремуму функції

1. Знайдіть $f'(x)$.
2. Знайдіть критичні точки функції.
3. Дослідіть знак похідної в околах (ліворуч і праворуч) критичних точок.
4. За допомогою ознак точок максимуму чи мінімуму функції з'ясуйте, чи є критична точка точкою екстремуму.

4. Монотонність функції

Алгоритм знаходження проміжку зростання (спадання) функції

1. Знайдіть похідну функції $f'(x)$.
2. Знайдіть критичні точки. Розв'яжіть рівняння $f'(x) = 0$ і знайдіть точки, у яких похідна не існує.
3. Побудуйте числову пряму. Позначте на ній знайдені критичні точки — вони поділять вісь на кілька інтервалів.
4. Визначте знак похідної на кожному інтервалі. Якщо $f'(x) > 0$ — функція зростає на цьому інтервалі, якщо $f'(x) < 0$, то функція спадає на інтервалі.
5. Запишіть проміжки зростання та спадання. Узагальніть результати у вигляді інтервалів, указавши де функція зростає, а де спадає.

5. Найбільше та найменше значення функції на заданому відрізку

Алгоритм знаходження найбільшої й найменшого значень функції на заданому проміжку $[a; b]$

1. Обчисліть значення заданої функції $f(x)$ на кінцях проміжку $[a; b]$, тобто $f(a)$ і $f(b)$.
2. Знайдіть критичні точки, які належать відрізку $[a; b]$.
3. Обчисліть значення функції $f(x)$ у знайдених критичних точках.
4. З усіх знайдених значень оберіть найбільше й найменше значення.

Алгоритм розв'язування практичних задач на знаходження найбільшого або найменшого значень деякої величини

1. Одну з невідомих величин позначте через x та знайдіть межі значення x . Інші величини виразіть через x .
2. Складіть функцію, яка буде математичною моделлю задачі.
3. Знайдіть найбільше чи найменше значення отриманої функції на заданому проміжку для значень x .
4. Проаналізуйте отриманий результат та запишіть відповідь до задачі.

6. Рівняння дотичної

Загальний вигляд рівняння дотичної: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Щоб скласти рівняння дотичної, потрібно знати три числа:

- 1) x_0 — абсцису точки дотику;
- 2) $f(x_0)$ — значення функції у точці з абсцисою x_0 ;
- 3) $f'(x_0)$ — значення похідної в точці x_0 або кутовий коефіцієнт дотичної.

7. Інтервали опуклості та точки перегину

Алгоритм знаходження інтервалів опуклості та точок перегину графіка функції

1. Знайдіть другу похідну функції.
2. Розв'яжіть рівняння $f''(x) = 0$, корені якого розбивають числову вісь на інтервали.
3. Розв'яжіть нерівності $f''(x) \geq 0$ або $f''(x) \leq 0$ на інтервалах, які визначають знайдені вище точки.
4. З'ясуємо, які зі знайдених точок є точками перегину графіка функції.

8. Дослідження функцій та побудова графіків функцій

Схема дослідження властивостей функції

1. Область визначення, тобто множина значень аргументу, при яких задана функція. Графічно — проекція графіка на вісь Ox .
2. Нулі функції — точки, в яких функція перетворюється в 0, або корені рівняння $f(x) = 0$. Графічно — точки перетину з віссю Ox .
3. Проміжки сталого знака, тобто проміжки, на яких функція додатна (від'ємна), або інакше розв'язки нерівності $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$).
Графічно — проміжки осі Ox , що відповідають точкам графіка, які лежать вище (нижче) осі Ox .
4. Парність або непарність функції, тобто виконання рівності $f(-x) = f(x)$ для парної функції та виконання рівності $f(-x) = -f(x)$ для непарної функції.
Графічно — графік парної функції симетричний відносно осі Oy , графік непарної функції симетричний відносно початку координат.
5. Проміжки монотонності, тобто проміжки на яких функція зростає або спадає.
Графічно — проміжки осі Ox , на яких графік прямує вгору або вниз.
6. Точки екстремуму — точки, що належать області визначення, в яких функція приймає найбільше (максимум) або найменше (мінімум) значення порівняно зі значеннями у близьких точках. Графічно — «вершини» або «впадини» на графіку функції.
7. Найбільше й найменше значення функції, порівняно з усіма можливими на відміну від екстремумів, де порівняння ведеться тільки з близькими точками.
Графічно — ординати найвищої і найнижчої точок графіку.
8. Опуклість графіка функції — інтервали, на яких графік функції опуклий униз або опуклий угору. Якщо $f''(x) \geq 0$ для всіх $x_0 \in (a; b)$, то функція $y = f(x)$ є опуклою вниз на інтервалі $(a; b)$. Якщо $f''(x) \leq 0$ для всіх $x_0 \in (a; b)$, то функція $y = f(x)$ є опуклою вгору на інтервалі $(a; b)$. Графічно — розміщення графіка функції вище дотичної до графіка функції в точці x_0 (для опуклої вниз), або нижче дотичної (для опуклої вгору).
9. Точки перегину графіка функції — це точки, в яких $f''(x) = 0$. Графічно — точки, в яких графік змінює напрям опуклості.

- 10.** Область значень функції — множина чисел, які складаються з усіх значень функції. Графічно — проекція графіка на вісь Oy .

Ілюстративні приклади

- 1.** Обчисліть похідну функції $y = \frac{2x}{\sqrt[3]{3x-2}}$.

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання. } y' &= \frac{2 \cdot \sqrt[3]{3x-2} - 2x \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{(3x-2)^2}} \cdot (3x-2)'}{(\sqrt[3]{3x-2})^2} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{3x-2} - \frac{6x}{3\sqrt[3]{(3x-2)^2}}}{(\sqrt[3]{3x-2})^2} = \\ &= \frac{\frac{6 \cdot \sqrt[3]{3x-2} \cdot \sqrt[3]{(3x-2)^2}}{3\sqrt[3]{(3x-2)^2}} - \frac{6x}{3\sqrt[3]{(3x-2)^2}}}{(\sqrt[3]{3x-2})^2} = \frac{\frac{6(3x-2) - 6x}{3\sqrt[3]{(3x-2)^2}}}{(\sqrt[3]{3x-2})^2} = \frac{12x - 12}{3\sqrt[3]{(3x-2)^4}} = \\ &= \frac{4x - 4}{\sqrt[3]{(3x-2)^4}}. \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь. } \frac{4x - 4}{\sqrt[3]{(3x-2)^4}}.$$

- 2.** Обчисліть площу трикутника, утвореного осями координат і дотичною до графіка функції $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$ у точці з абсцисою $x_0 = 3$.

Розв'язання. Знайдемо рівняння дотичної, загальний вигляд якої $y = f'(x)(x - x_0) + f(x_0)$.

$$\text{Значення функції у точці } x_0 = 3: f(3) = \frac{3+3}{3-2} = 6.$$

$$\text{Знайдемо похідну функції та } f'(x_0): f'(x) = -\frac{5}{(x-2)^2}, f'(3) = -5.$$

$$3) \text{ Рівняння дотичної: } y = -5(x - 3) + 6 = -5x + 21.$$

4) Знайдемо точки перетину дотичної з осями координат.

Вісь ординат пряма $y = -5x + 21$ перетинає в точці $(0; 21)$.

Вісь абсцис пряма $y = -5x + 21$ перетинає в точці $(4,2; 0)$.

Отже, катети прямокутного трикутника, площу якого треба знайти, дорівнюють 21 і 4,2. Оскільки площа прямокутного трикутника дорівнює половині добутку його катетів, тобто $S = \frac{1}{2}ab$, то $S = \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 4,2 = 44,1$ (кв. од.).

Відповідь. 44,1 кв. од.

- 3.** Дослідіть функції $y = 2x^3 + 3x^2$ на монотонність та точки екстремуму.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції та критичні точки: $y' = 6x^2 + 6x$, $6x^2 + 6x = 0$, звідси $x_1 = -1$, $x_2 = 0$.

Дослідимо знак похідної функції на інтервалах між критичними точками. Оскільки графіком похідної функції є парабола, напрямлена вітками вгору, то при $x \in (-\infty; -1]$ і $x \in [0; +\infty)$ похідна набуває додатних значень. Отже, якщо $x \in (-\infty; -1]$

і $x \in [0; +\infty)$, то функція зростає. При $x \in [-1; 0]$ похідна набуває від'ємних значень. Тому, якщо $x \in [-1; 0]$, то функція спадає.

Оскільки при переході через точку -1 похідна функції змінює знак з плюса на мінус, то точка $x = -1$ є точкою максимуму функції. При переході через точку 0 похідна функції змінює знак з мінуса на плюс, тому точка $x = 0$ є точкою мінімуму функції.

Відповідь. Якщо $x \in (-\infty; -1]$ і $x \in [0; +\infty)$, то функція зростає. Якщо $x \in [-1; 0]$, то функція є спадною. $x_{\max} = -1$, $x_{\min} = 0$.

4. Побудуйте графік функції $y = 4x^6 - 6x^4$.

Розв'язання. 1) Область визначення функції — множина всіх дійсних чисел.

2) Нулі функції: $4x^6 - 6x^4 = 0$, звідси $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

3) Функція парна, оскільки її нулі симетричні відносно осі абсцис.

4) Розглянемо диференційовну й неперервну функцію $y = f(x) = 4x^6 - 6x^4$.

Дослідимо її на монотонність:

$$y' = 24x^5 - 24x^3 = 24x^3(x^2 - 1) = 24x^3(x+1)(x-1),$$

$y' = 0$, звідси $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$.

Оскільки $y(-1) = y(1) = -2$; $y(0) = 0$,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, то функція $y = 4x^6 - 6x^4$

спадає на проміжку $(-\infty; -1]$ і набуває на ньому всіх значень, не менших від -2 , до того ж по одному разу. Аналогічно, на проміжку $[-1; 0]$ функція зростає і набуває по одному разу всіх значень з відрізка $[-2; 0]$. На проміжку $[0; 1]$ функція спадає і набуває по одному разу всіх значень з відрізка $[-2; 0]$, а при аргументах із проміжку $[1; +\infty)$ функція зростає і набуває по одному разу всіх значень, не менших від -2 , причому по одному разу.

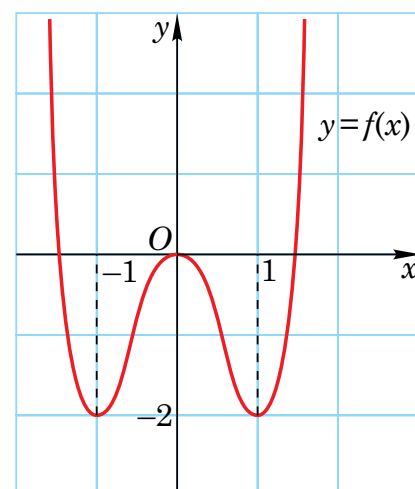
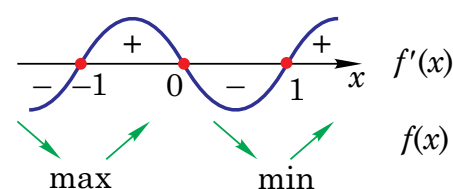
Тоді $x = -1$ і $x = 1$ є точками мінімуму функції, а точка $x = 0$ — точка максимуму функції.

Знайдемо ординати точок екстремуму.

Якщо $x = -1$ і $x = 1$, то $y(-1) = y(1) = -2$.

Якщо $x = 0$, то $y(0) = 0$.

Ураховуючи проведені дослідження побудуємо графік функції (див. рисунок)



V. Самостійна робота

Варіант 1

- 1.** Знайдіть похідну функції $y = \frac{1}{x^3} + \sqrt{x}$.

A	Б	В	Г	Д
$-\frac{3}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\frac{3}{x^4} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\frac{1}{3x^2} + 2\sqrt{x}$	$\frac{3}{x^4} + \frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{3x^2} + \frac{\sqrt{x}}{2}$

[illegible]

- 2.** Рівняння дотичної до параболи $y = 2x^2 - 4x - 1$ має вигляд $y = 8x - 19$. Визначте абсцису точки дотику.

А	Б	В	Г	Д
2	3	4	-4	8

[illegible]

- 3.** Знайдіть критичні точки функції $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$.

А	Б	В	Г	Д
0	-3; 1	-3; 1	1; 3	-1; 3

[illegible]

- 4.** За яких значень параметра a функція $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + ax$ має критичні точки, але не має точок екстремумів?

А	Б	В	Г	Д
-1	-1; 1	1	-4; 4	4

[illegible]

5. Установіть відповідність між функцією (1–4) та її похідною (А–Д).

Функція

$$\mathbf{1} \quad y = \frac{x}{5} + 5$$

2 $y = 5 - \frac{x}{3}$

3 $y = 3 + 5x$

4 $y = 5 - 3x$

Похідна функції

A $y' = -3$

Б $y' = 5$

B $y' = -\frac{1}{3}$

$$\Gamma_{y'} = -5$$

$$Д \quad y' = \frac{1}{3}$$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

[illegible]

6. Установіть відповідність між функцією (1–4) та її похідною (А–Д).

Функція

1 $y = x \sin 3$

2 $y = 3\sin x$

3 $y = \sin x^3$

4 $y = \sin^3 x$

Похідна функції

A $y' = 3\sin^2 x \cos x$

Б $y' = \cos 3$

B $y' = 3x^2 \cos x^3$

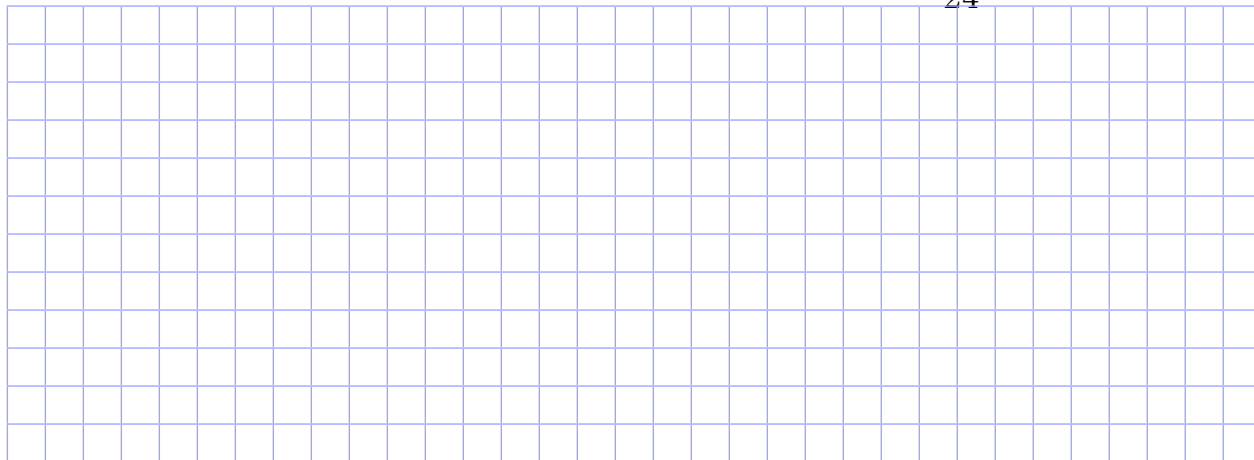
$$\Gamma_{y'} = \sin 3$$

Д $y' = 3 \cos x$

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐

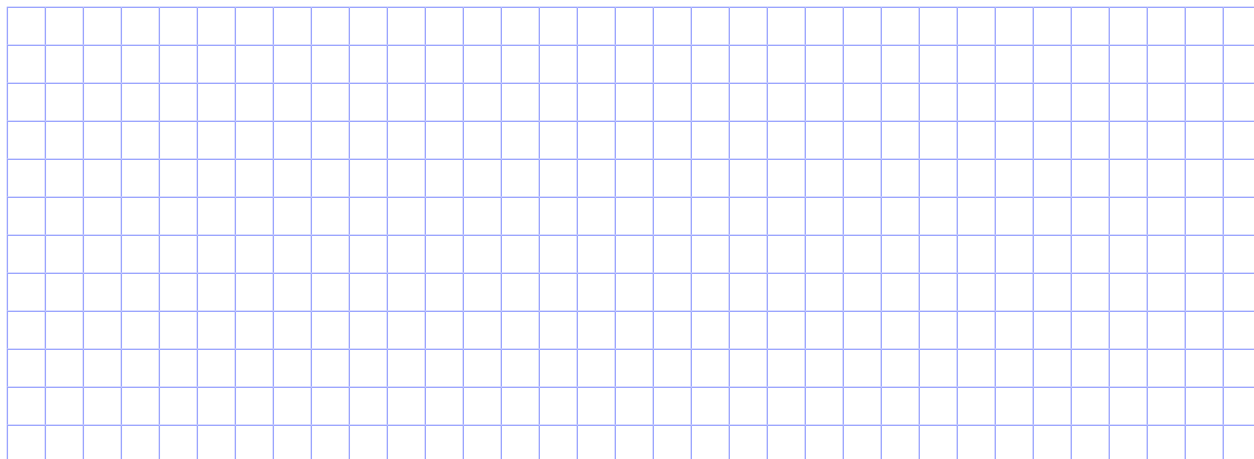
A full-page view of a blank sheet of graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

7. Обчисліть значення похідної функції $y = \sqrt{\operatorname{tg} 6x}$ у точці $x_0 = \frac{\pi}{24}$.



Відповідь.

8. Знайдіть проміжки спадання функції $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 5$. У відповідь запишіть абсцису середини одного з проміжків спадання.



Відповідь.

Варіант 2

- 1.** Знайдіть похідну функції $y = 5 \sin 7x - 7x^2 + 7$.

А	Б	В	Г	Д
$5\cos 7x - 14x$	$35\cos 7x - 7x$	$35\cos 7x - 14x$	$7\cos 7x - 7x + 7$	$5\cos 7x - 7x$

[illegible]

- 2.** Складіть рівняння дотичної до графіка функції $y = x^3$ у точці $(2; 8)$.

А	Б	В	Г	Д
$y + 8 = 12(x + 2)$	$y - 8 = \frac{1}{12}(x - 2)$	$y - 8 = x - 2$	$y - 8 = 8(x - 2)$	$y - 8 = 12(x - 2)$

[illegible]

- 3.** Укажіть критичні точки функції $y = x(x - 4)^3$.

А	Б	В	Г	Д
0; 4	4	1; 4	3	1

[illegible]

- 4.** За яких значень параметра a точка 5 є точкою мінімуму функції $y = f(x)$, якщо $f(x) = (x - 5)(x - a)$?

А	Б	В	Г	Д
$a \geq 5$	$a = 5$	$a > 5$	$a \leq 5$	$a < 5$

[illegible]

5. Установіть відповідність між функцією (1–4) та її похідною (А–Д).

Функція

1 $y = 4x^4 - \frac{2}{x^2}$

2 $y = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2x^2}$

3 $y = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{x^2}$

4 $y = 4x^4 - \frac{1}{2x^2}$

Похідна функції

А $y' = x^3 + \frac{1}{x^3}$

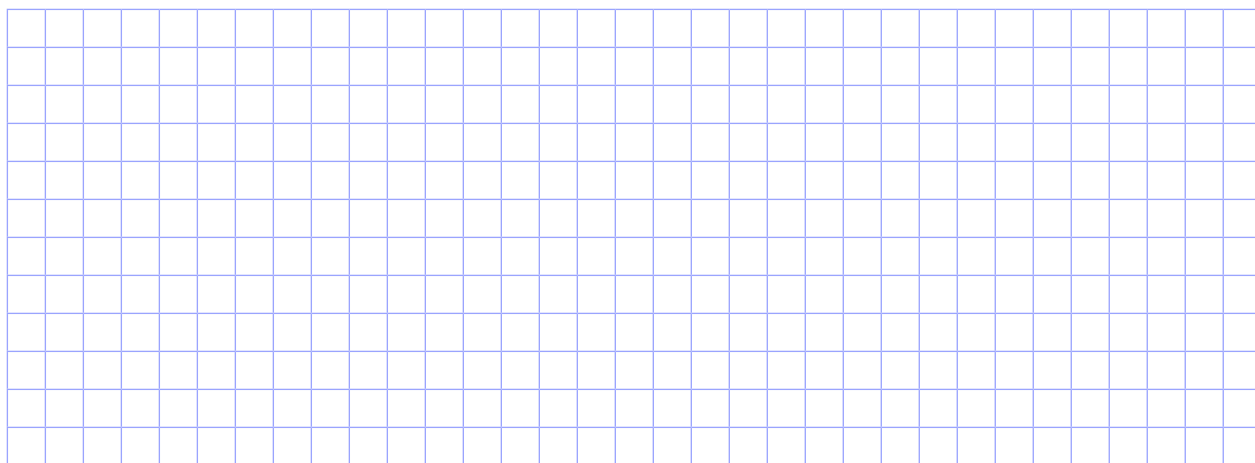
Б $y' = x^3 - \frac{4}{x^3}$

В $y' = 16x^3 + \frac{4}{x^3}$

Г $y' = 16x^3 + \frac{1}{x^3}$

Д $y' = x^3 + \frac{4}{x^3}$

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐



6. Установіть відповідність між функцією (1–4) та її похідною в точці π (А – Д).

Функція

1 $y = \sin \frac{x}{3}$

2 $y = \sin 3x$

3 $y = \frac{\sin x}{3}$

4 $y = \frac{\cos x}{3}$

Похідна функції в точці π

А -3

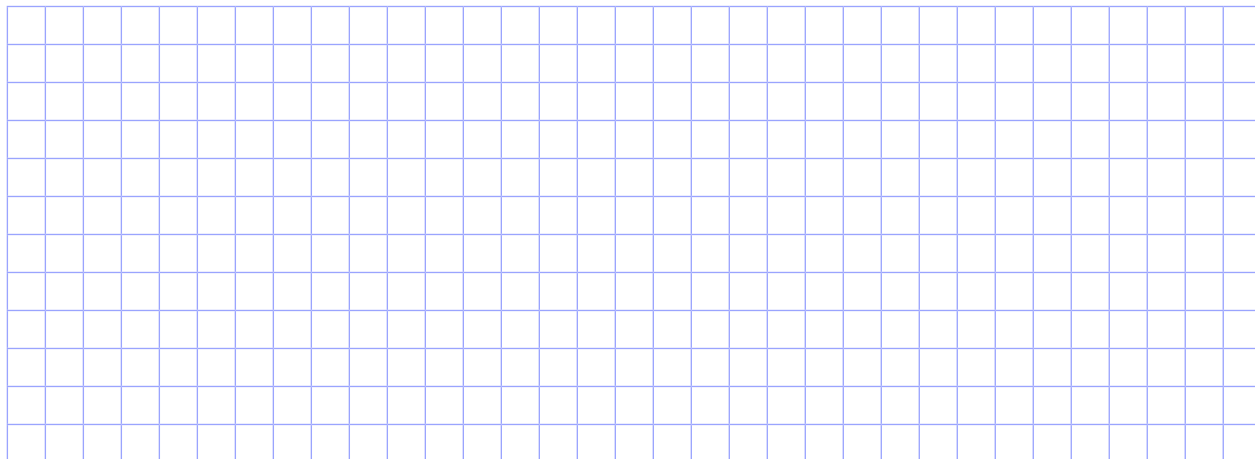
Б $-\frac{1}{3}$

В 0

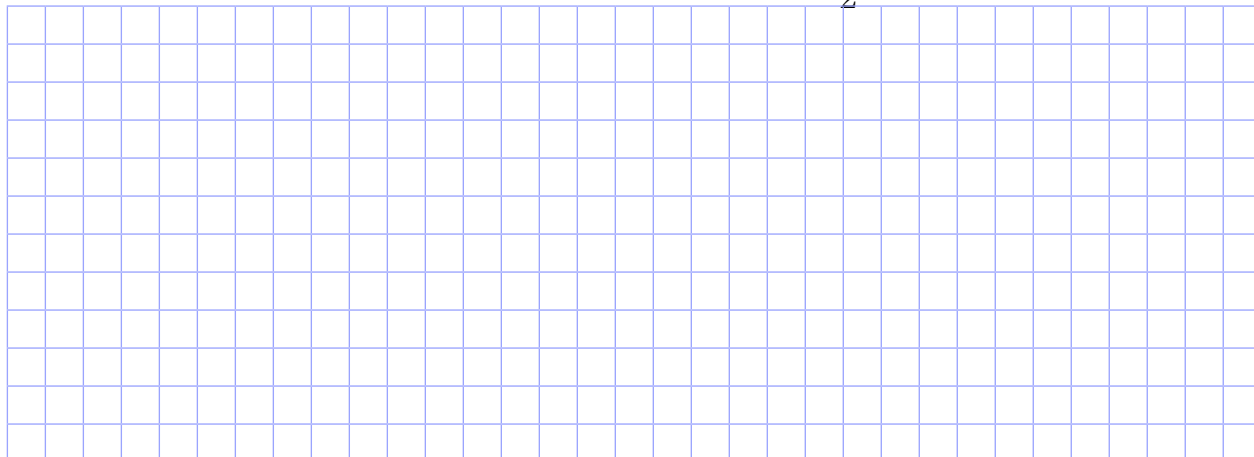
Г $\frac{1}{6}$

Д 1

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐

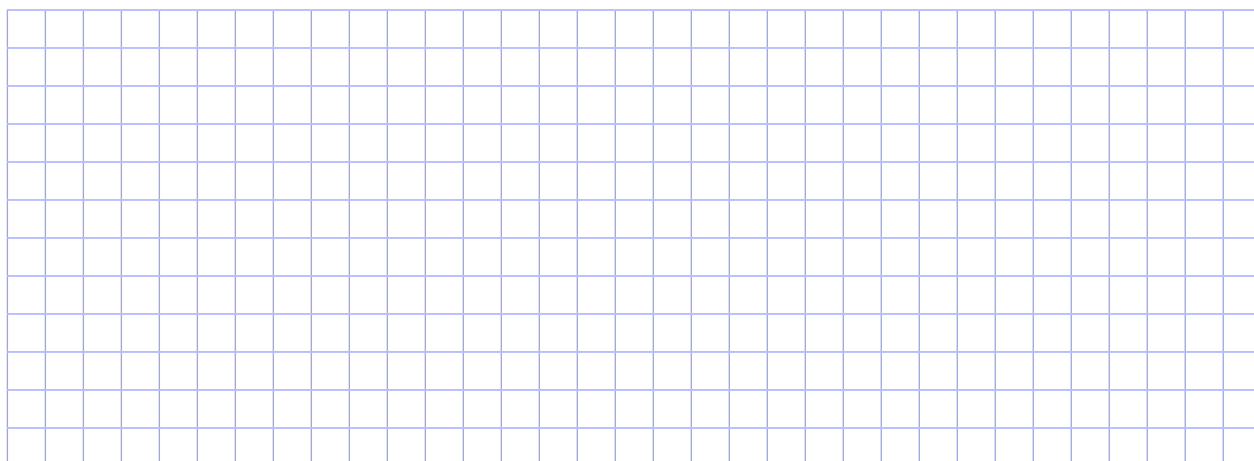


7. Знайдіть похідну функції $y = \sqrt[4]{1 + \cos^3 x}$ у точці $x_0 = -\frac{\pi}{2}$.



Відповідь.

8. Знайдіть проміжки спадання функції $y = \frac{3x + x^2}{x - 1}$. У відповідь запишіть додатну абсцису середини одного з проміжків спадання.



Відповідь.

Відповіді до тестових завдань

Варіант 1

1. Б.
2. Б.
3. Д.
4. В.
5. 1 – Д, 2 – В, 3 – Б, 4 – А.
6. 1 – Г, 2 – Д, 3 – В, 4 – А.
7. 6.
8. 0,5.

Варіант 2

1. В.
2. Д.
3. В.
4. Д.
5. 1 – В, 2 – А, 3 – Д, 4 – Г.
6. 1 – Г, 2 – А, 3 – Б, 4 – В.
7. 0.
8. 2.

Таблиця оцінювання

№ завдання	1	2	3	4	5	6	7	8	Сума
Бали	1	1	1	1	4	4	2	2	16

Критерії оцінювання

1) Коефіцієнт оцінювання: $\frac{12}{16} = \frac{1}{3}$.

2) Коефіцієнт оцінювання $\frac{1}{3}$ множимо на кількість набраних балів і отримаємо оцінку.

Наприклад, учень/учениця набрав/набрала 24 тестових бали за результатами тестування.

Тоді, оцінка становить $24 \cdot \frac{1}{3} = 8$ (балів).

VI. Рефлексія (1–2 хв)

Учні/учениці усно або письмово завершують речення.

— Сьогодні я повторив/повторила

— Найважливішим для мене було

— Тепер я вмю

- Найскладнішим для мене було
.
.
- Мені ще потрібно попрацювати над
.
.
- Поради собі для вивчення наступної теми
.
.