11 Тема 5. Моніторинг навчальних досягнень учнів/учениць

Урок 3. Показникова функція. Повторення

Тип уроку: урок повторення та систематизації.

План уроку

1. Показникова функція.
2. Показникові рівняння й нерівності.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

здійснює перехід від абстрактного до конкретного та від конкретного до абстрактного [12 МАО 2.3.1–2 П];

обирає математичну модель розв'язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов [12 МАО 3.2.2–1 П];

визначає та усуває прогалини у власних математичних знаннях і вміннях у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 4.1.3–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

1) Теоретичний матеріал, поданий у конспекті уроку, має схематичний та опорний характер. Ви можете самостійно його змінювати, доповнювати або деталізувати залежно від рівня підготовки класу.

2) Ілюстративні приклади доцільно пропонувати як тренувальні вправи. Їх можна опрацьовувати індивідуально, у парах або в групах.

3) Роботу над теоретичним матеріалом варто організовувати у формі групової діяльності або фронтального опитування.

4) Запропонуйте учням/ученицям виконати завдання тренувального тесту, який може бути формувального або діагностичного характеру.

5) На уроці можна проводити презентацію та захист індивідуальних або групових учнівських проєктів.

I. Організаційна частина (2 хв)

II. Захист індивідуальних (групових) проєктів

III. Показникова функція

1. Означення та графік показникової функції

Виберемо деяке додатне число a, відмінне від 1. Кожному дійсному числу x можна поставити у відповідність число a^x. Таким чином задано функцію $f(x) = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$, з областю визначення $x \in R$.

Означення. Функція $y = a^x$, де $a > 0$ і $a \neq 1$ називається ***показниковою***.

Чому a не може бути менше 0 або дорівнювати 0, або дорівнювати 1?

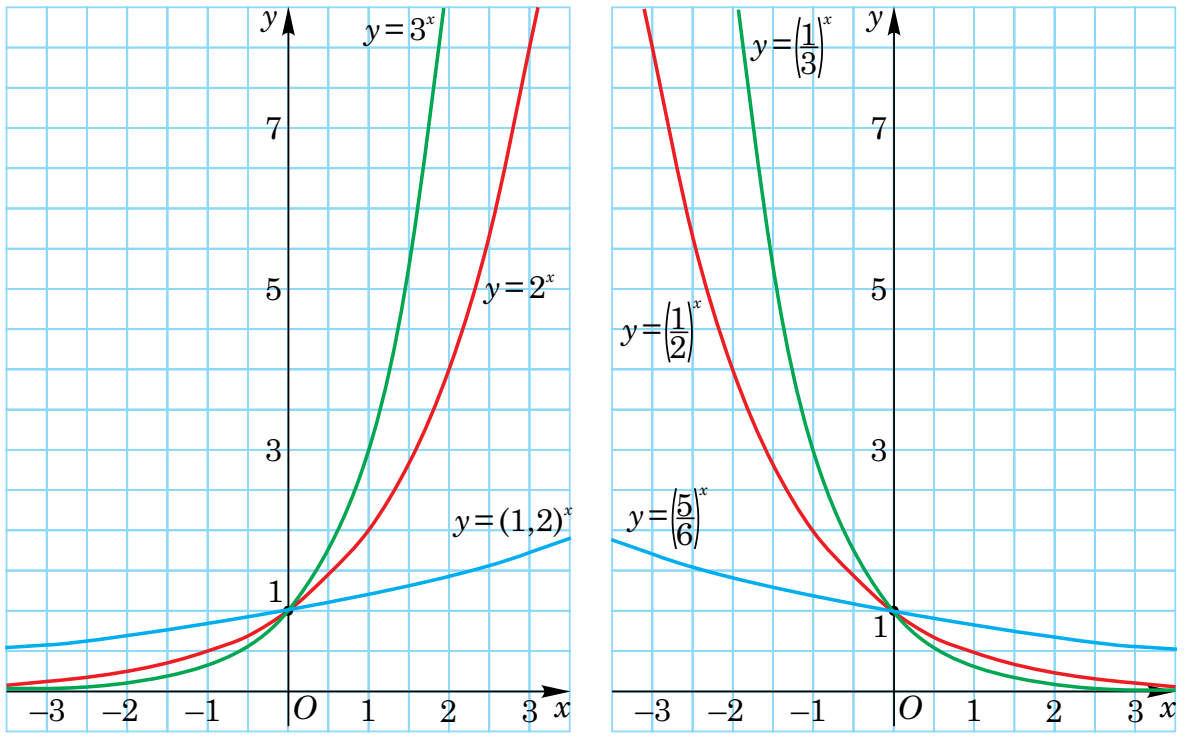
Якщо $a = 0$, $x \leq 0$, то вираз ах невизначений, наприклад, 0^0, 0^{-2}.

Якщо $a < 0$ і x – нескоротний дріб, знаменник якого парний, то вираз a^x невизначений. Наприклад, вирази $(-3)^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{(-3)^5}$, $(-5)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{(-5)^3}$ не є дійсними числами.

Оскільки $a > 0$, $a \neq 1$ $a^0 = 1$, то графік будь-якої показникової функції проходить через точку (0; 1).

Наведемо приклади графіків показникової функції.

Графік показникової функції (див. рисунок).



2. Властивості показникової функції

1. Область визначення функції: $D(y) = R$.
2. Множина значень функції $E(y)$: $y \in (0; +\infty)$. Тобто функція набуває лише додатних значень на всій області визначення.
3. Найбільшого та найменшого значень функції не існує.
4. Нулів функція не має, графік не перетинає вісь Ox.
5. Функція ні парна, ні непарна.
6. Якщо $a > 1$, то функція зростаюча. Якщо $0 < a < 1$, то функція спадна.

3. Експонента

Показникову функцію $y = e^x$, основою якої є число Ойлера, називається ***експонентною***.

Число $e \approx 2{,}718281828\ldots$ є ірраціональним числом, що визначається як

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

IV. Показникові рівняння й нерівності

1. Показникові рівняння

Показниковими рівняннями називаються рівняння, в яких змінна знаходиться в показнику степеня.

Показникові рівняння умовно можна класифікувати за методами їхнього розв'язування (див. таблицю).

№	Види рівнянь	Приклади
1.	Рівняння, що розв'язуються переходом до іншої основи.	1) $2^x = 4^5$; 2) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{7}{3}\right)^{5x-1}$.
2.	Рівняння, що розв'язуються за допомогою переходу до однакового показника степеня.	1) $5^{2x-4} = 49^{2-x}$; 2) $3^{x^2-9} = 7^{x^2-9}$.
3.	Рівняння, що розв'язуються за допомогою винесення спільного множника за дужки.	1) $5^{x+1} + 5^x = 150$; 2) $2^{x+2} - 2^x = 96$.
4.	Рівняння, що зводяться до алгебричних за допомогою заміни змінних.	1) $7^{2x} - 6\cdot 7^x + 5 = 0$; 2) $4^x + 2^x = 72$.
5.	Однорідні рівняння відносно показникових функцій.	1) $3\cdot 2^{2x} - 5\cdot 6^x + 2\cdot 3^{2x} = 0$; 2) $2^{2x+1} - 7\cdot 10^x + 25^{x+0,5} = 0$.
6.	Рівняння, що розв'язуються графічним методом або за допомогою властивостей функцій.	1) $3^x = 11 - x$; 2) $3^{x-2} = \frac{9}{x}$.

2. Методи розв'язування показникових рівнянь

1. ***Зведення лівої та правої частин рівняння до показникових функцій з рівними основами.***

Якщо $a > 0$ і $a \neq 1$, то рівняння $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ рівносильне рівнянню $f(x) = g(x)$.

2. ***Розклад показникового рівняння на множники.***

Якщо в рівнянні кожен показник степеня відрізняється від іншого на деяке число, то такі рівняння розв'язуються винесенням за дужки степеня з найменшим показником.

3. ***Метод заміни.***

Досить часто показникове рівняння можна звести до алгебричного за допомогою заміни $t = a^{f(x)}$.

Наприклад, рівняння виду $Aa^{2f(x)} + Ba^{f(x)} + C = 0$ можна розв'язати за допомогою заміни $a^{f(x)} = t$, при цьому $a^{2f(x)} = t^2$ або рівняння виду $Aa^{f(x)} + Ba^{-f(x)} + C = 0$ можна розв'язати за допомогою заміни $a^{f(x)} = t$, при цьому $a^{-f(x)} = \frac{1}{t}$.

3. Показникові нерівності

Нерівність називають показниковою, якщо її змінні входять лише до показників степенів при сталих основах.

Показникові нерівності умовно можна класифікувати за методами їхнього розв'язування (див. таблицю).

Види нерівностей	Приклади
Показникові нерівності, що розв'язуються з використанням монотонності показникової функції.	$\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{x}{2}} \leq 7$, $\left(\frac{1}{9}\right)^{-3x+1} > \sqrt{3}$, $2^{\frac{3x}{2}+3} > 16$, $\left(\frac{5}{6}\right)^{3x+2-x^2} \leq \frac{25}{36}$.
Показникові нерівності, які розв'язуються за допомогою розкладу на множники.	$5^{x+1} + 5^x > 150$, $2 \cdot 3^{x+1} - 3^x < 15$.
Показникові нерівності які розв'язуються методом заміни змінних.	$4^x + 2^{x+1} - 24 < 0$, $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 > 0$.

4. Використання монотонності показникової функції для розв'язування показникових нерівностей

Якщо $a > 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) > g(x)$.

Якщо $0 < a < 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) < g(x)$.

Методи розв'язування показникових нерівностей

1) метод використання монотонності показникової функції;
2) метод розкладання нерівності на множники;

3) метод заміни змінних;
4) функціонально-графічний метод.

Ілюстративні приклади

1. Розв'яжіть рівняння $6^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 2^{x+8}$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді $3^{2x+4} \cdot 2^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 2^{x+8}$.

Використаємо властивість членів пропорції: $\frac{3^{2x+4}}{3^{3x}} = \frac{2^{x+8}}{2^{2x+4}}$, звідси $3^{4-x} = 2^{4-x}$ або

$\frac{3^{4-x}}{2^{4-x}} = 1$, $\left(\frac{3}{2}\right)^{4-x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{0}$. Отже, $x = 4$.

Відповідь. 4.

2. Розв'яжіть рівняння $\left(4-\sqrt{15}\right)^{\frac{x}{2}} + \left(4+\sqrt{15}\right)^{\frac{x}{2}} = 8$.

Розв'язання. Оскільки $\left(4-\sqrt{15}\right)\left(4+\sqrt{15}\right) = 1$, то $4-\sqrt{15} = \frac{1}{4+\sqrt{15}}$.

Тоді $\left(4-\sqrt{15}\right)^{\frac{x}{2}} + \left(4+\sqrt{15}\right)^{\frac{x}{2}} = 8$,

$$\frac{1}{\left(4+\sqrt{15}\right)^{\frac{x}{2}}} + \left(4+\sqrt{15}\right)^{\frac{x}{2}} = 8.$$

Уведемо заміну $\left(4+\sqrt{15}\right)^{\frac{x}{2}} = t > 0$, тоді $\frac{1}{t} + t - 8 = 0$, $t^2 - 8t + 1 = 0$ $(t \neq 0)$.

Корені квадратного рівняння $t_1 = 4-\sqrt{15}$, $t_2 = 4+\sqrt{15}$.

Повертаємось до заміни: $\left[\begin{array}{l} \left(4+\sqrt{15}\right)^{\frac{x}{2}} = 4-\sqrt{15}, \\ \left((4+\sqrt{15}\right)^{\frac{x}{2}} = 4+15; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 2. \end{array}\right.$

Відповідь. –2; 2.

3. Розв'яжіть нерівність $\left(\sqrt{15}+2\right)^{x-1} \geq \left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$.

Розв'язання. Помножимо нерівність на вираз $\left(\sqrt{5}-2\right)^{x-1}$.

$$\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1} \cdot \left(\sqrt{5}-2\right)^{x-1} \geq \left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \left(\sqrt{5}-2\right)^{x-1},$$

$$\left(\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)\right)^{x-1} \geq \left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}+x-1}, \quad \left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1+x^2-1}{x+1}} \leq 1,$$

$$\left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x^2+x-2}{x+1}} \leq \left(\sqrt{5}-2\right)^{0}.$$

Оскільки $\sqrt{5}-2 < 1$, то змінимо знак нерівності: $\frac{x^2+x-2}{x+1} \geq 0$.

Методом інтервалів отримаємо множину розв'язків $x \in [-2; -1) \cup [1; +\infty)$.

Відповідь. $[-2; -1) \cup [1; +\infty)$.

4. Розв'яжіть нерівність $\sqrt[3]{2^{\frac{3x-1}{x-1}}} < 8^{\frac{x-3}{3x-7}}$.

Розв'язання. $\sqrt[3]{2^{\frac{3x-1}{x-1}}} < 8^{\frac{x-3}{3x-7}}$, $2^{\frac{3x-1}{3(x-1)}} < 2^{\frac{3(x-3)}{3x-7}}$, звідси

$\frac{3x-1}{3(x-1)} < \frac{3(x-3)}{3x-7}$, $\frac{12x-20}{(3x-3)(3x-7)} < 0$.

Методом інтервалів отримаємо $x \in (-\infty; 1) \cup \left(\frac{5}{3}; \frac{7}{3}\right)$.

Відповідь. $(-\infty; 1) \cup \left(\frac{5}{3}; \frac{7}{3}\right)$.

5. Знайдіть суму цілих розв'язків нерівності $98 - 7^{x^2+5x-48} \geq 49^{x^2+5x-49}$.

Розв'язання. Запишемо нерівність у вигляді:

$98 - 7^{x^2+5x-48} \geq (7^2)^{x^2+5x-48-1}$, $98 - 7^{x^2+4x-48} \geq (7^2)^{x^2+5x-48} \cdot \frac{1}{49}$.

Уведемо заміну $7^{x^2+5x-48} = t > 0$, отримаємо $98 - t \geq t^2 \cdot \frac{1}{49}$ або $t^2 + 49t - 4802 \geq 0$.

Розв'язки квадратичної нерівності $t \in [-98; 49]$.

Повертаємось до заміни: $7^{x^2+5x-48} \leq 49$ або $x^2 + 5x - 48 \leq 2$, $x^2 + 5x - 50 \leq 0$.

Отримаємо множину розв'язків $x \in [-10; 5]$.

Сума цілих розв'язків нерівності дорівнює –40.

Відповідь. –40.

6. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12, \\ 2^y \cdot 3^x = 18. \end{cases}$

Розв'язання. Перемножимо рівняння системи, отримаємо $6^{x+y} = 6^3$.

Поділимо перше рівняння системи на друге, отримаємо $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \left(\frac{2}{3}\right)$.

Тоді, $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12, \\ 2^y \cdot 3^x = 18; \end{cases}$ $\begin{cases} 6^{x+y} = 6^3, \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \frac{2}{3}; \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 1. \end{cases}$

Звідси $\begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases}$

Відповідь. (2; 1).

V. Самостійна робота

Варіант 1

1. Розв'яжіть рівняння $5^{x-9}=5$ і $3^x-3=0$ та вкажіть суму їхніх коренів.

А	Б	В	Г	Д
0	1	8	9	11

2. Розв'яжіть рівняння $3^{x-5}=9^{-2x}$.

А	Б	В	Г	Д
$1\frac{2}{3}$	1	1,25	0	–1

3. Розв'яжіть нерівність $2^x<\frac{1}{8}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;-3)$	$\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$	$\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)$	$(-3;+\infty)$	$\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$

4. Розв'яжіть нерівність $3^x+3^{2-x}>10$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$	$(-\infty;1)\cup(9;+\infty)$	(0; 2)	$(-\infty;3)\cup(10;+\infty)$	(1; 9)

5. Установіть відповідність між рівнянням (1–4) та значенням (А–Д) виразу 2^{x_0-1}, де x_0 — корінь рівняння.

Рівняння

1 $2^x - 2^{x-2} = 24$

2 $2^{x+2} - 7 \cdot 2^{x-2} = 16$

3 $2^{x+4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 120$

4 $2^{x+2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} = 56$

Значення виразу

А 2

Б 4

В 8

Г 16

Д 32

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

6. Установіть відповідність між нерівністю (1–4) та множиною її розв'язків (А–Д).

Нерівність

1 $7^x > 1$

2 $7^x > -1$

3 $\left(\frac{1}{7}\right)^x < -1$

4 $\left(\frac{1}{7}\right)^x > 1$

Множина розв'язків нерівності

А $(1; +\infty)$

Б $(-\infty; 0)$

В $(0; +\infty)$

Г $(-\infty; +\infty)$

Д $\varnothing$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

7. Розв'яжіть рівняння $7 \cdot 3^x - 5^{x+1} = 3^{x+3} - 5^{x+2}$.

Відповідь.

8. Розв'яжіть нерівність $5 \cdot 2^{\sqrt{x}} - 3 \cdot 2^{\sqrt{x}-1} \geq 56$. У відповідь запишіть найменший цілий розв'язок нерівності.

Відповідь.

Варіант 2

1. Розв'яжіть рівняння $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} = 4^{2x}$ і $4^{3x+1} = 8^{-2x-1}$ та вкажіть інтервал, який містить їхні корені.

А	Б	В	Г	Д
$(-3;\ 2)$	$(-2;\ -1)$	$(-1;\ 0)$	$(1;\ 0)$	$(1;\ 2)$

2. Серед наведених рівнянь, укажіть рівняння, яке рівносильне рівнянню $8^x = 16^{-1}\sqrt{32^x}$.

А	Б	В	Г	Д
$3x = x - 1$	$3x = \frac{x}{2} - 1$	$3x = \frac{5x}{2} \cdot 4$	$3x = \frac{5x}{2} - 4$	$3x = \frac{6x}{2} - 4$

3. Розв'яжіть нерівність $9^{x+5} > 27^x$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;\ 5)$	$(10; +\infty)$	$(-\infty;\ 10)$	$(-\infty;\ +\infty)$	R

4. Розв'яжіть нерівність $2^{x+1} + 2^x < 24$.

А	Б	В	Г	Д
$(-3;\ +\infty)$	$(-\infty;\ -3)$	$(3;\ +\infty)$	$(0;\ 3)$	$(-\infty;\ 3)$

5. Установіть відповідність між рівнянням (1–4) та сумою його коренів (А–Д).

Рівняння

1 $\left(\frac{1}{4}\right)^{-x} - 8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} + 16 - 0$

2 $4^x - 36\cdot 2^x + 128 = 0$

3 $16^x - 20\cdot 4^x + 64 = 0$

4 $\left(\frac{1}{9}\right)^{-x} - 30\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-x} + 81 = 0$

Сума коренів рівняння

А 3

Б 4

В 5

Г 2

Д 7

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

6. Установіть відповідність між нерівністю (1– 4) та множиною її розв'язків (А–Д).

Нерівність

1 $1 \le \left(\frac{1}{2}\right)^x \le 16$

2 $1 \le 2^x \le 16$

3 $1 \le 16^x \le 2$

4 $1 \le \left(\frac{1}{16}\right)^x \le 2$

Множина розв'язків нерівності

А $\left[-\frac{1}{4}; 0\right]$

Б $[-4; 0]$

В $\left[0; \frac{1}{4}\right]$

Г $\left[\frac{1}{4}; 4\right]$

Д $[0; 4]$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

7. Розв'яжіть рівняння $3^{2\sqrt{x+5}} - 10 \cdot 3^{\sqrt{x+5}} + 9 = 0$. У відповідь запишіть суму коренів рівняння.

Відповідь.

8. Розв'яжіть нерівність $2^x + 2^{-x+1} - 3 < 0$. У відповідь запишіть координату середини проміжку, який є розв'язком нерівності.

Відповідь.

Відповіді до тестових завдань

Варіант 1

1. Д.
2. Б.
3. А.
4. А.
5. 1 – Г, 2 – Д, 3 – Б, 4 – В.
6. 1 – В, 2 – Г, 3 – Д, 4 – Б.
7. 0.
8. 16.

Варіант 2

1. В.
2. Г.
3. Д.
4. Д.
5. 1 – Г, 2 – Д, 3 – А, 4 – Б.
6. 1 – Б, 2 – Д, 3 – В, 4 – А.
7. –6.
8. 0,5.

Таблиця оцінювання

№ завдання	1	2	3	4	5	6	7	8	**Сума**
Бали	1	1	1	1	4	4	2	2	**16**

Критерії оцінювання

1) Коефіцієнт оцінювання: $\frac{12}{16} = 0{,}75$.

2) Коефіцієнт оцінювання 0,75 множимо на кількість набраних балів і отримаємо оцінку.

Наприклад, учень/учениця набрав/набрала 24 тестових бали за результатами тестування.

Тоді, оцінка: $12 \cdot 0{,}75 = 9$ (балів).

VI. Рефлексія (2 хв)

На числовій прямій позначте свої успіхи в розв'язанні задач сьогоднішнього уроку від 0 балів до 10 балів.

1) Що нового я сьогодні дізнався/дізналася?

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

2) Чи зрозумів/зрозуміла я алгоритм розв'язання показникових рівнянь? Якщо ні, то що залишилося незрозумілим?

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

3) Чи зрозумів/зрозуміла я алгоритм розв'язання показникових нерівностей? Якщо ні, то що залишилося незрозумілим?

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

4) Які помилки я зробив/зробила під час роботи? Як їх виправити в майбутньому?

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

4) Які поради я можу запропонувати для однокласників, щоб ефективніше розв'язувати показникові рівняння й нерівності?

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

5) Як я можу застосувати знання про показникову функцію в життєвих ситуаціях?

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .