

Повторення властивостей тригонометричних функцій

Урок 1. Тригонометричні функції синус і косинус та їхні властивості

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

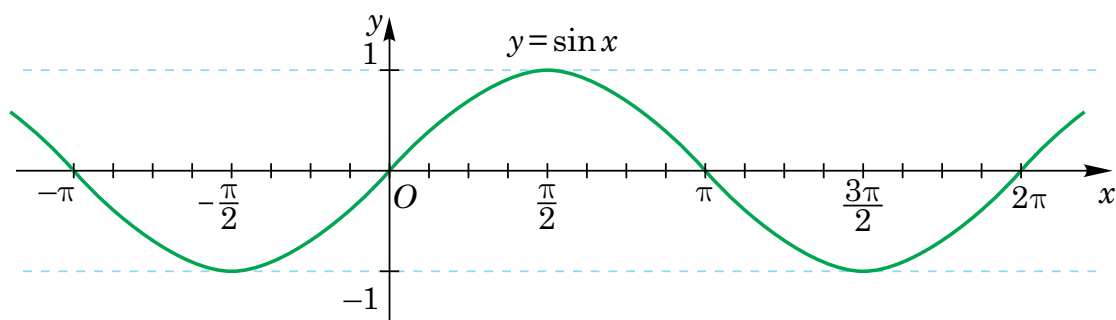
- 1) пригадаєте, як будувати графік функції $y = \sin x$;
- 2) повторите основні властивості функції $y = \sin x$;
- 3) пригадаєте, як будувати графік функції $y = \cos x$;
- 4) повторите основні властивості функції $y = \cos x$;
- 5) повторите, як описувати основні властивості функції за її графіком;
- 6) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Укажіть головний період функції $y = \cos 3\pi x$.
2. Укажіть градусні міри кутів α ($0^\circ < \alpha < 360^\circ$) таких, для яких $\sin \alpha = 0$.
3. Укажіть градусні міри кутів α ($0^\circ < \alpha < 360^\circ$) таких, для яких $\cos \alpha = \frac{1}{2}$.
4. Знайдіть область визначення функції $f(x) = 3x - 2$, якщо $-1 \leq x \leq 1$.
5. Дослідіть функцію $f(x) = x^3 - x$ на парність.

III. Функція синус. Графік функції та її властивості

Означення. Графік функції $y = \sin x$ називається *синусоїдою*.



Для повторення взаємозалежності між синусоїдою та одиничним колом скористайтесь Geogebra-аплетом:

<https://www.geogebra.org/m/ae9echxr>



Властивості функції $y = \sin x$

Область визначення	Множина всіх дійсних чисел, тобто: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
Область значень	$E(y) = [-1; 1]$.
Найбільше значення функції	Найбільше значення функції $y = \sin x$ дорівнює 1 і досягається воно в точках, що відповідають кутам виду $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
Найменше значення функції	Найменше значення функції $y = \sin x$ дорівнює -1 і досягається воно в точках, що відповідають кутам виду $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
Нулі функції	$x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
Парність та непарність функції	Функція непарна. Графік функції симетричний відносно початку координат.
Періодичність функції	Функція періодична з головним періодом 2π .
Проміжки монотонності функції	Зростає на кожному з проміжків виду $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$. Спадає на кожному з проміжків виду $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$.
Проміжки знакосталості функцій	$\sin x > 0$ на кожному з проміжків виду $(2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$. $\sin x < 0$ на кожному з проміжків виду $(\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Приклад 1. Серед чисел $-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\pi, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, 8\pi$ укажіть нулі функції $y = \sin x$.

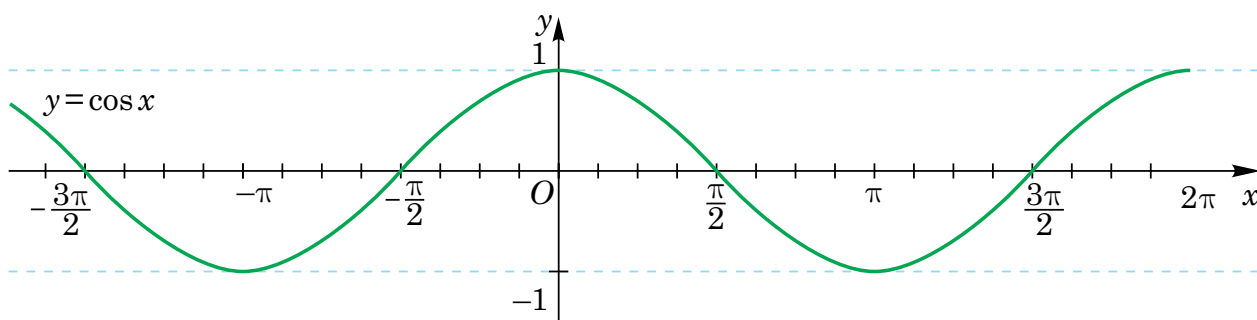
[illegible]

Приклад 2. Порівняйте $\sin 20^\circ$ і $\sin 20^\circ \cdot \sin 35^\circ$.

[illegible]

IV. Функція косинус. Графік функції та її властивості

Означення. Графік функції $y = \cos x$ називається **косинусоїдою**.



Для повторення взаємозалежності між синусоїдою та одиничним колом скористай-
теся Geogebra-аплетом:



<https://www.geogebra.org/m/f5bsfgxa>

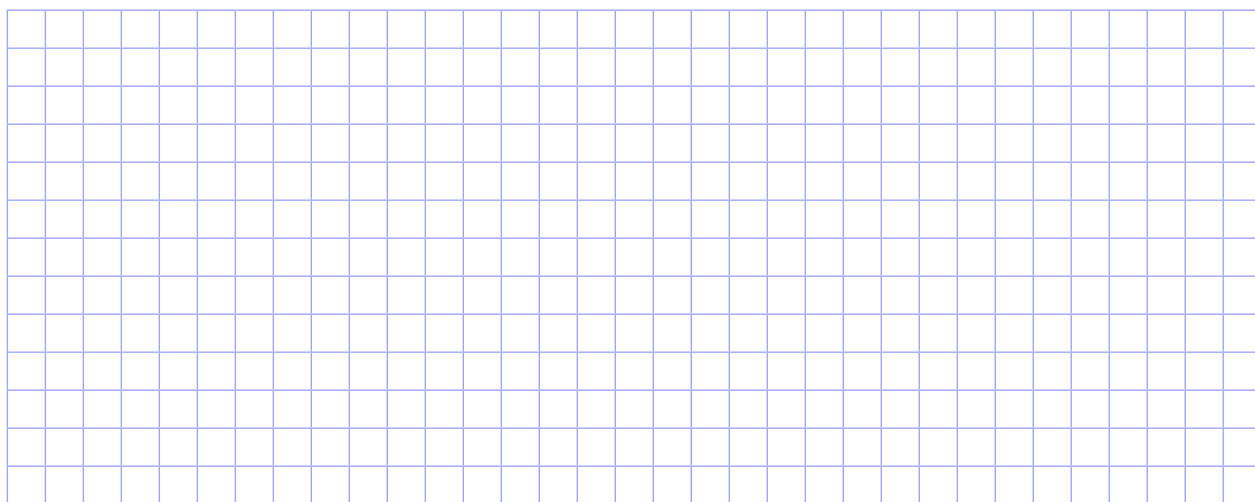
Властивості функції $y = \cos x$

Область визначення	Множина усіх дійсних чисел, тобто: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
Область значень	$E(y) = [-1; 1]$.
Найбільше значення функції	Найбільше значення функції $y = \cos x$ дорівнює 1 і досягається воно в точках, що відповідають кутам виду $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
Найменше значення функції	Найменше значення функції $y = \cos x$ дорівнює -1 і досягається воно в точках, що відповідають кутам виду $\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
Нулі функції	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Парність та непарність функції	Функція парна. Графік функції симетричний відносно осі ординат.
Періодичність функції	Функція періодична з головним періодом 2π .
Проміжки монотонності функції	Зростає на кожному з проміжків виду $[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$. Спадає на кожному з проміжків виду $[2\pi n; \pi + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$.
Проміжки знакосталості функцій	$\cos x > 0$ на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$. $\cos x < 0$ на кожному з проміжків виду $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.

Приклад 3. Обчисліть значення синусів та косинусів кутів. Заповніть таблицю.

α	$\frac{11\pi}{3}$	$-\frac{11\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{2}$	$-\frac{11\pi}{6}$
$\sin \alpha$				
$\cos \alpha$				



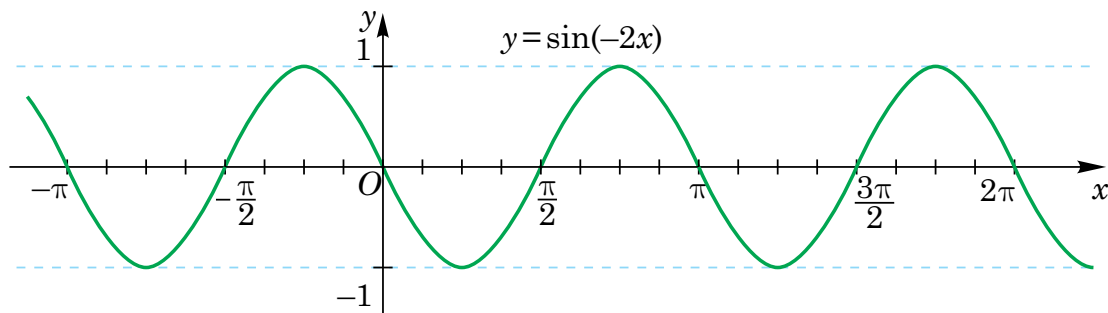
V. Дослідження властивостей функцій, що містять синус та косинус

Орієнтовна послідовність дій для дослідження властивостей функцій за їхніми графіками.

1. Знайдіть область визначення функції.
2. Знайдіть множину значень функції.
3. Дослідіть функцію на парність.

4. Дослідіть функцію на періодичність.
5. Знайдіть нулі функції.
6. Укажіть проміжки знакосталості функції.
7. Укажіть проміжки монотонності функції.

Приклад 4. За графіком функції $y = \sin(-2x)$ (див. рисунок) дослідіть її властивості.



Розв'язання. 1) Областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел.

2) Множиною значень є проміжок $[-1; 1]$.

3) Функція непарна.

4) Функція періодична з головним періодом π .

5) Нулі функції — числа виду $x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

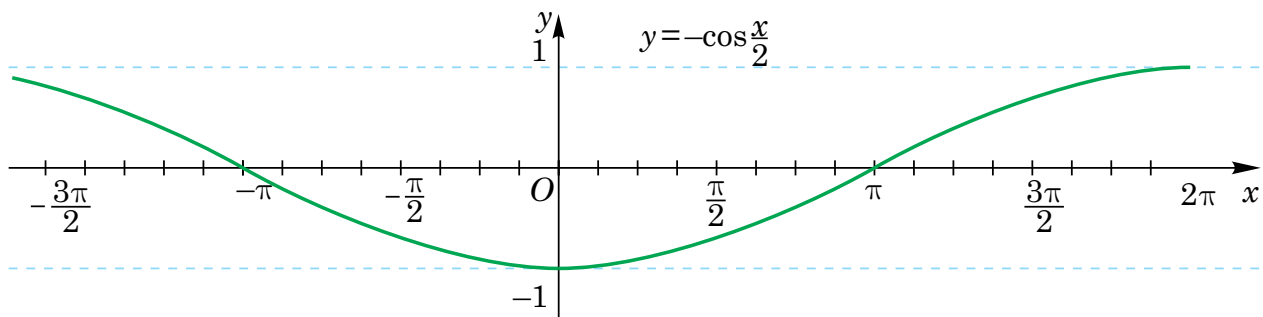
6) Функція додатна на кожному з проміжків виду $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$, і від'ємна

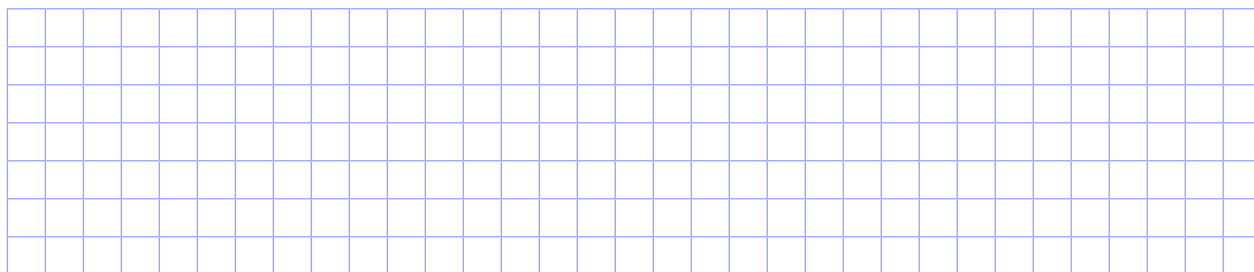
на кожному з проміжків виду $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.

7) Функція зростає на кожному з проміжків виду $\left[\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n\right], n \in \mathbb{Z}$, і спадає

на кожному з проміжків виду $\left[-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right], n \in \mathbb{Z}$.

Приклад 5. За графіком функції $y = -\cos \frac{x}{2}$ (див. рисунок) дослідіть її властивості.





VI. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Футболіст б'є ногою по м'ячу. М'яч летить під гострим кутом α до площини горизонту. Час його польоту t (у секундах) можна обчислити за формулою $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$.

При якому найменшому значенні кута α (у радіанах) час польоту м'ячу буде не менший від трьох секунд, якщо м'яч летить з початковою швидкістю $v_0 = 30$ м/с? Прискорення вільного падіння g вважайте рівним 10 м/с².

Задача 2. Олімпіадна задача. Дано опуклий п'ятикутник. Антон виписав синуси кутів цього п'ятикутника, а Борис — косинуси кутів. Виявилося, що серед чисел записаних Антоном немає чотирьох різних. Чи можуть числа записані Борисом усі бути різними?

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Порівняйте:

1) $\cos 1,7\pi$ і $\cos 1,68\pi$;

2) $\sin 32^\circ$ і $\sin 31^\circ$;

3) $\cos 32^\circ$ і $\cos 31^\circ$;

4) $\sin \frac{4\pi}{3}$ і $\sin \frac{23\pi}{18}$.

2. Укажіть найменший додатний період функції:

1) $y = \sin 4x$;

2) $y = \sin \frac{x}{4}$;

3) $y = \cos \frac{x}{6}$;

4) $y = \cos 6x$.

3. Дослідіть функцію на парність:

1) $y = x^2 + \cos x$;

2) $y = x^3 + \sin x$.

4. Заповніть таблицю:

α	720°	225°	300°	870°	900°	-330°	-660°	-210°
$\sin \alpha$								
$\cos \alpha$								

5. Укажіть декілька значень α , при яких:

1) $\sin \alpha = 1$;

2) $\cos \alpha = -1$;

3) $\cos \alpha = 0$;

4) $\sin \alpha = 0$.

6. З'ясуйте, зростає чи спадає функція $y = \cos x$ на проміжках:

- $$\begin{array}{lll} 1) [3\pi; 4\pi]; & 2) [-2\pi; -\pi]; & 3) \left[2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]; \\ 4) \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]; & 5) [1; 3]; & 6) [-2; -1]? \end{array}$$

Рівень В

1. Розташуйте числа в порядку спадання:

- 1) $\sin(-0,3), \sin 0,3, \sin 2, \sin 1, \sin 3;$
- 2) $\cos 1, \cos 2, \cos 3, \cos 4, \cos 5.$

2. На яких проміжках функції $y = \cos x$ і $y = \sin x$ одночасно додатні?

3. Побудуйте графік функції:

- $$1) \ y = \frac{\sin x}{\sin x}; \qquad 2) \ y = \frac{\cos x}{\cos x}.$$

Укажіть область визначення функції.

4. Побудуйте графік функції $y = -\sin x$ на проміжку $[-4\pi; 0]$ та укажіть проміжки монотонності та проміжки знакосталості функції.

5. Побудуйте графік функції $y = -\cos x$ на проміжку $[0; 4\pi]$ та укажіть проміжки монотонності та проміжки знакосталості цієї функції.

6. Дослідіть функцію на парність:

- 1) $y = x^2 + \cos x$; 2) $y = x^3 + \sin x$.

7. Заповніть таблицю:

α	$\frac{13\pi}{3}$	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{13\pi}{4}$	$\frac{20\pi}{3}$	$\frac{55\pi}{4}$	$-\frac{11\pi}{2}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{17\pi}{3}$
$\sin \alpha$								
$\cos \alpha$								

8. Укажіть найбільше і найменше значення виразів:

- 1) $1 - \sin \alpha$; 2) $2 + \cos \alpha$.

8. Доведіть за допомогою графіків, що:

- 1) $\sin 60^\circ = -\sin 240^\circ$;
- 2) $\sin 340^\circ = \sin(-160^\circ)$;
- 3) $\sin 170^\circ = -\sin 350^\circ$;
- 4) $\cos 320^\circ = -\cos(-140^\circ)$;
- 5) $\sin(-20^\circ) = -\sin 160^\circ$;
- 6) $\cos 380^\circ = -\cos 560^\circ$.

10. Для кутів $0 \leq \alpha < 2\pi$ знайдіть усі значення α , для яких:

- $$1) \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 2) \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 3) \cos \alpha = -\frac{1}{2}. \quad 4) \sin \alpha = \frac{1}{2}.$$

11. Знайдіть область визначення та область значень функції:

- $$1) \ y = \sqrt{\sin x + 1}; \qquad 2) \ y = \sqrt{\cos x - 1}.$$

12. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sin 2x$; 2) $y = \cos \frac{x}{2}$; 3) $y = \sin \frac{2}{x}$; 4) $y = \sin \sqrt{x}$.

Рівень С

1. Дослідіть на парність функцію:

1) $y = \sin(7x^3 + x^5)$; 2) $y = \sin |x - x^3|$;
3) $y = \sin x + |\cos x|$; 4) $y = \sin(x + |x|) + \sin(x - |x|)$.

2. Побудуйте графік функції. Укажіть проміжки, на яких функція додатна:

1) $y = \frac{|\cos x|}{\cos x}$; 2) $y = \frac{\sin x}{|\sin x|}$.

3. Побудуйте графік функції та укажіть проміжки її зростання:

1) $y = \sin |x|$; 2) $y = \cos |x - \pi|$.

4. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} \cos x, x \geq -\frac{\pi}{4}, \\ \sin x, x < -\frac{\pi}{4}. \end{cases}$

5. При яких значеннях параметра a буде парною або непарною функція:

1) $y = a \sin x - \cos x$; 2) $y = a(5 \sin x - 3)^3 + (5 \sin x + 3)^3$?

6. Побудуйте графік функції:

1) $y = (\sqrt{\sin x})^2$; 2) $y = \sqrt{\cos x - 1}$; 3) $y = \sin x + \sin |x|$; 4) $y = \frac{\sin |x|}{\sin x}$.

7. Творче завдання. Створіть проєкт у вигляді веб сторінки або застосунку, який дозволяє користувачеві вивчати властивості функцій $y = \sin x$ та $y = \cos x$.

Рефлексія

1. Я вмію будувати графік функції $y = \sin x$.

Так Ще треба потренуватися Ні

2. Я знаю основні властивості функції $y = \sin x$.

Так Ще треба потренуватися Ні

3. Я вмію будувати графік функції $y = \cos x$.

Так Ще треба потренуватися Ні

4. Я знаю основні властивості функції $y = \cos x$.

Так Ще треба потренуватися Ні

5. Я знаю, як описувати основні властивості функції за її графіком.

Так Ще треба потренуватися Ні

- 6.** Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

Можливі теми проєктів

- 1.** Графіки функції синус і функції косинус у задачах балістики.
- 2.** Створення геометричних орнаментів за допомогою синусоїди та косинусоїди.
- 3.** Використання властивостей графіків синуса й косинуса для розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь і нерівностей.
- 4.** Опис періодичних процесів за допомогою функції синус і функції косинус.
- 5.** Оцінювання значень виразів, що містять функцію синус або функцію косинус.







