

Повторення властивостей тригонометричних функцій

Урок 3. Тригонометричні функції тангенс і котангенс та їхні властивості

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

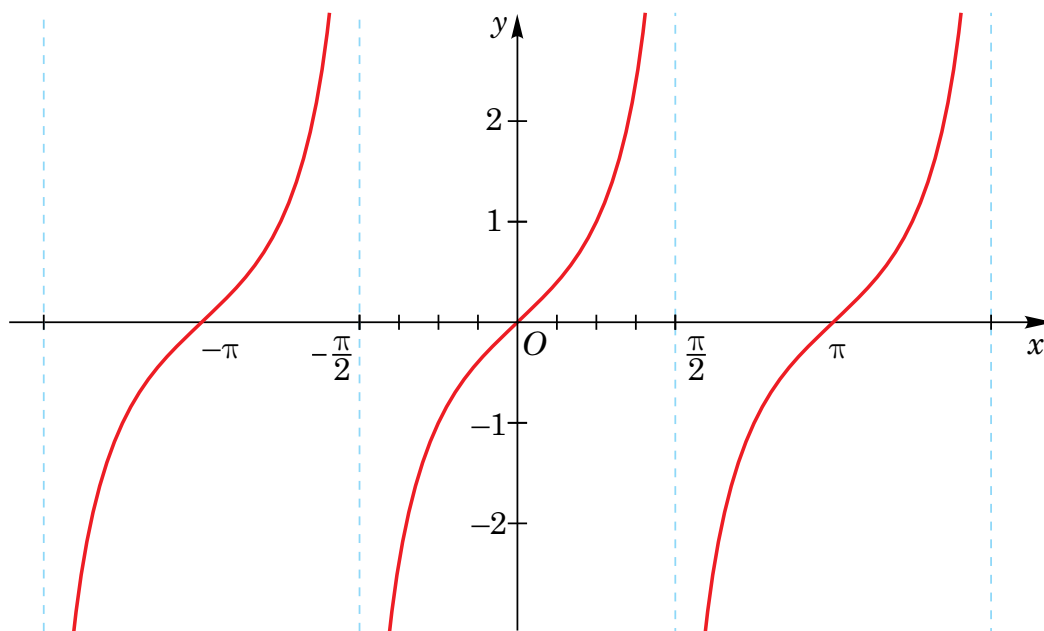
- 1) пригадаєте, як будувати графік функції $y = \operatorname{tg} x$;
- 2) повторите основні властивості функції $y = \operatorname{tg} x$;
- 3) нагадаєте, як будувати графік функції $y = \operatorname{ctg} x$;
- 4) повторите основні властивості функції $y = \operatorname{ctg} x$;
- 5) повторите, як описувати основні властивості функції за її графіком;
- 6) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Укажіть головний період функції $y = \operatorname{ctg} 7x$.
2. Укажіть градусні міри кутів α ($0^\circ < \alpha < 360^\circ$) таких, для яких $\operatorname{ctg} \alpha = 0$.
3. Укажіть градусні міри кутів α ($0^\circ < \alpha < 360^\circ$) таких, для яких $\operatorname{tg} \alpha = 1$.
4. Задано функцію $f(x) = x^{41}$, порівняйте $f(-6,2)$ та $f(-5,8)$.
5. Якій координатній чверті належить точка, що відповідає куту $-\frac{5\pi}{4}$?

III. Функція тангенс. Графік функції та її властивості

Означення. Графік функції $y = \operatorname{tg} x$ називається *тангенсоїдою*.

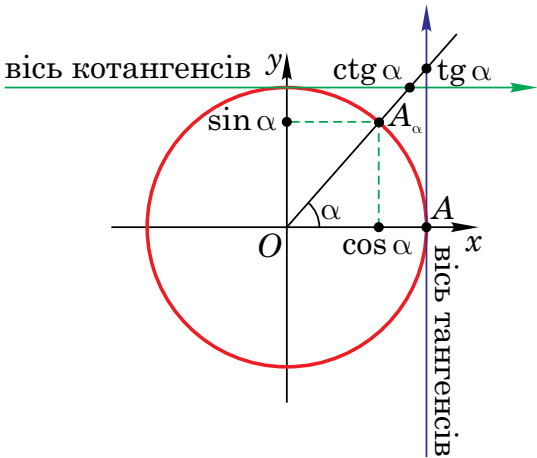


Для повторення взаємозалежності між тангенсоїдою та одиничним колом скористайтеся Geogebra-аплетом:

<https://www.geogebra.org/m/asckby9g>



Властивості функції $y = \operatorname{tg} x$

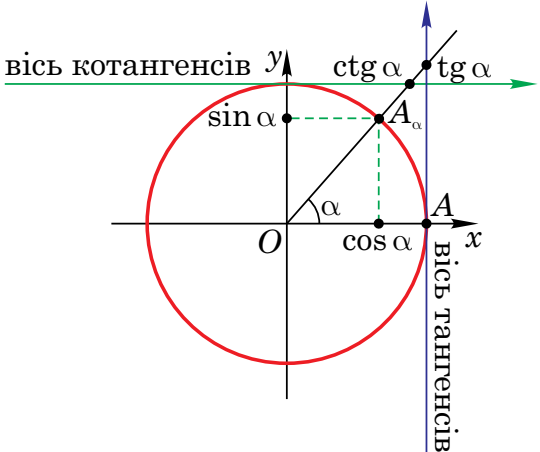
Область визначення	Множина всіх дійсних чисел, окрім чисел виду $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Прямі, що задаються рівняннями $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, називають <i>асимптотами</i> .
Область значень	$E(y) = (-\infty; +\infty)$.
Найбільше значення функції	
Найменше значення функції	
Нулі функції	$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Для повторення взаємозалежності між котангенсоїдою та одиничним колом скористайтеся Geogebra-аплетом:

<https://www.geogebra.org/m/ryt5wgch>

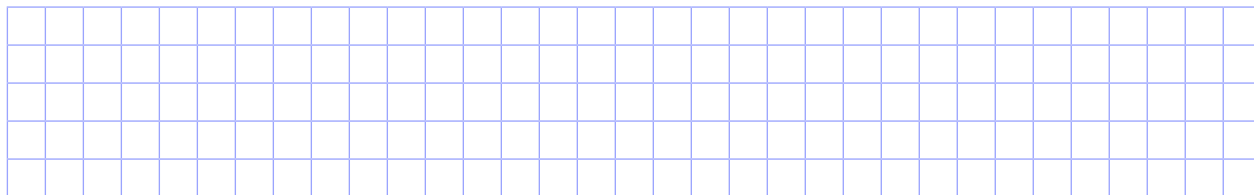


Властивості функції $y = \text{ctg } x$

Область визначення	Множина всіх дійсних чисел, окрім чисел виду $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Прямі, що задаються рівнянням $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, називають <i>асимптотами</i> .
Область значень	$E(y) = (-\infty; +\infty)$.
Найбільше значення функції	 Котангенс може бути будь-яким дійсним числом, тому що це абсциса точки перетину прямих $y = kx$ та $y = 1$.
Найменше значення функції	
Нулі функції	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
Парність та непарність функції	Функція непарна. Графік функції симетричний відносно початку координат.
Періодичність функції	Функція періодична з головним періодом π .
Проміжки монотонності функції	Спадає на кожному з проміжків виду $(\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.
Проміжки знакосталості функцій	$\text{ctg } x > 0$ на кожному з проміжків виду $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$. $\text{ctg } x < 0$ на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Приклад 3. Знайдіть значення кутів α . Заповніть таблицю.

α	$\frac{11\pi}{3}$	$-\frac{11\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{2}$	$-\frac{11\pi}{6}$
$\operatorname{tg} \alpha$				
$\operatorname{ctg} \alpha$				



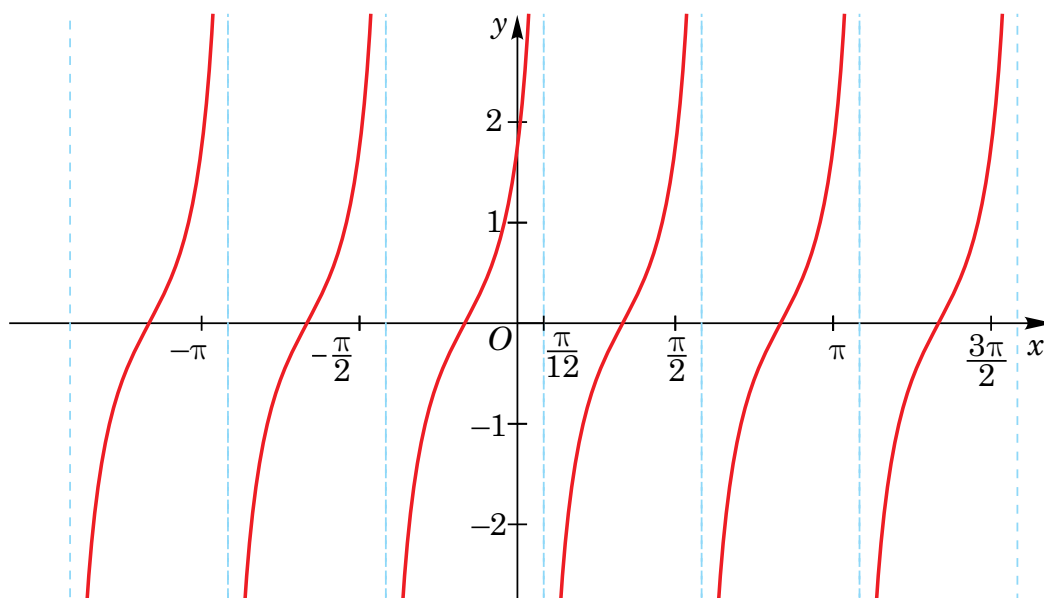
V. Дослідження властивостей функцій, що містять тангенс та котангенс

Орієнтовна послідовність дій для дослідження властивостей функцій за їхніми графіками.

1. Знайдіть область визначення функції.
2. Знайдіть множину значень функції.
3. Дослідіть функцію на парність.
4. Дослідіть функцію на періодичність.
5. Знайдіть нулі функції.
6. Укажіть проміжки знакосталості функції.
7. Укажіть проміжки монотонності функції.

Ілюстративні приклади

Приклад 4. За графіком функції $y = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$ (див. рисунок) дослідіть її властивості.



Розв'язання. 1) Областю визначення функції є всі дійсні числа, крім чисел виду

$$\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

2) Множиною значень є множина всіх дійсних чисел.

3) Функція ні парна, ні непарна.

4) Функція періодична з головним періодом $\frac{\pi}{2}$.

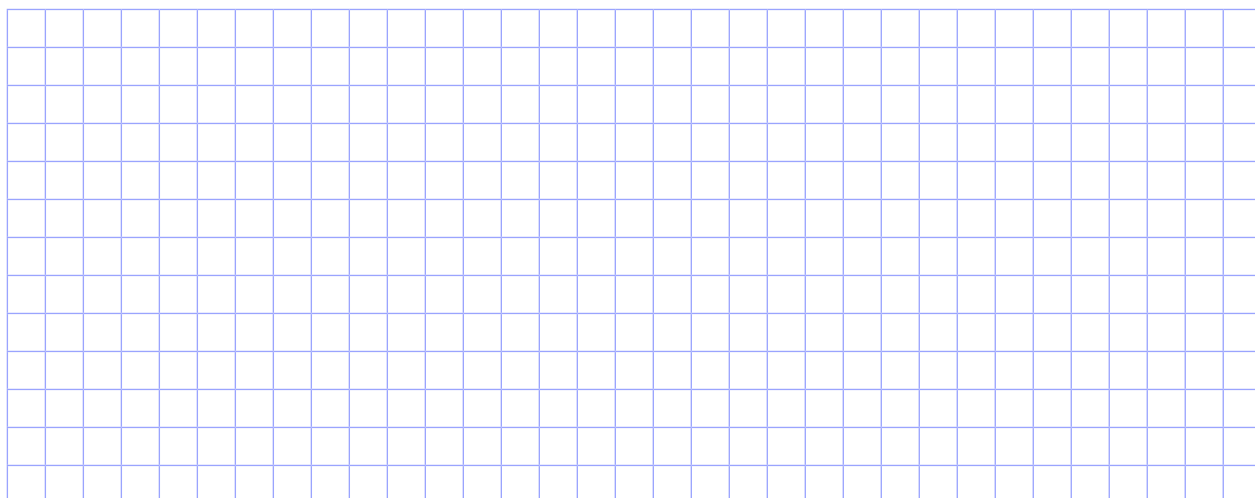
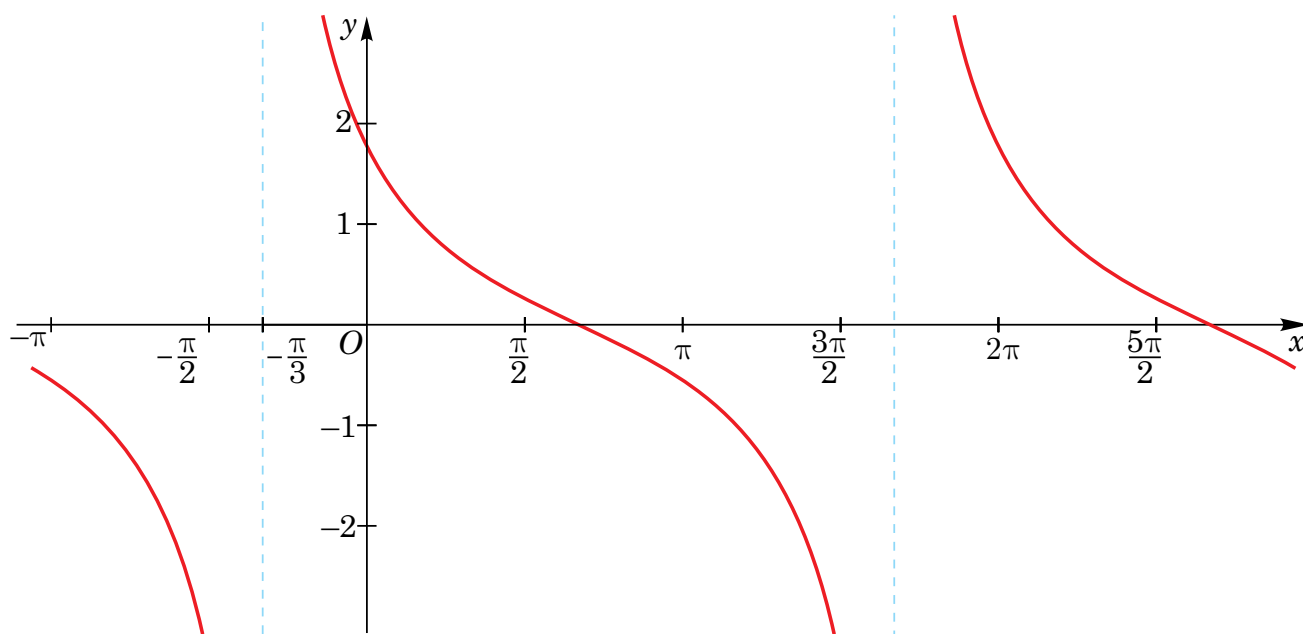
5) Нулі функції — числа виду $x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

6) Функція додатна на кожному з проміжків виду $\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}; \frac{7\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}\right), n \in \mathbb{Z}$, і від'єм-

на на кожному з проміжків виду $\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}; \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}\right), n \in \mathbb{Z}$.

7) Функція зростає на кожному з проміжків виду $\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}; \frac{7\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}\right), n \in \mathbb{Z}$.

Приклад 5. За графіком функції $y = -\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$ (див. рисунок) дослідіть її властивості.



VI. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Військовому катеру потрібно перетнути річку завширшки $s = 70$ м, береги якої можна зобразити у вигляді паралельних прямих так, аби причалити точно навпроти місця відправлення. Швидкість течії річки $v = 0,5$ м/с. Час, що вимірюється в секундах, обчислюється за формулою $t = \frac{s}{v} \operatorname{ctg} \alpha$, де α — гострий кут між напрямком руху катера та береговою лінією. Під яким найменшим кутом α (у радіанах) до берега потрібно рухатися катеру, щоб час руху не перевищував 140 с?

Задача 2. Олімпіадна задача. В опуклому чотирикутнику тангенс одного з його кутів дорівнює m .

- 1) Чи можуть тангенси трьох решти його кутів дорівнювати m ?
- 2) Чи можуть тангенси усіх кутів чотирикутника бути рівними, якщо чотирикутник неопуклий? Відповідь обґрунтуйте.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Порівняйте:

- 1) $\operatorname{ctg} 1,7\pi$ і $\operatorname{ctg} 1,68\pi$;
- 2) $\operatorname{tg} 32^\circ$ і $\operatorname{tg} 31^\circ$;
- 3) $\operatorname{ctg} 32^\circ$ і $\operatorname{ctg} 33^\circ$;
- 4) $\operatorname{tg} \frac{4\pi}{3}$ і $\operatorname{tg} \frac{23\pi}{18}$.

2. Укажіть найменший додатний період функції:

- 1) $y = \operatorname{tg} 4x$;
- 2) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{4}$;
- 3) $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{6}$;
- 4) $y = \operatorname{ctg} 6x$.

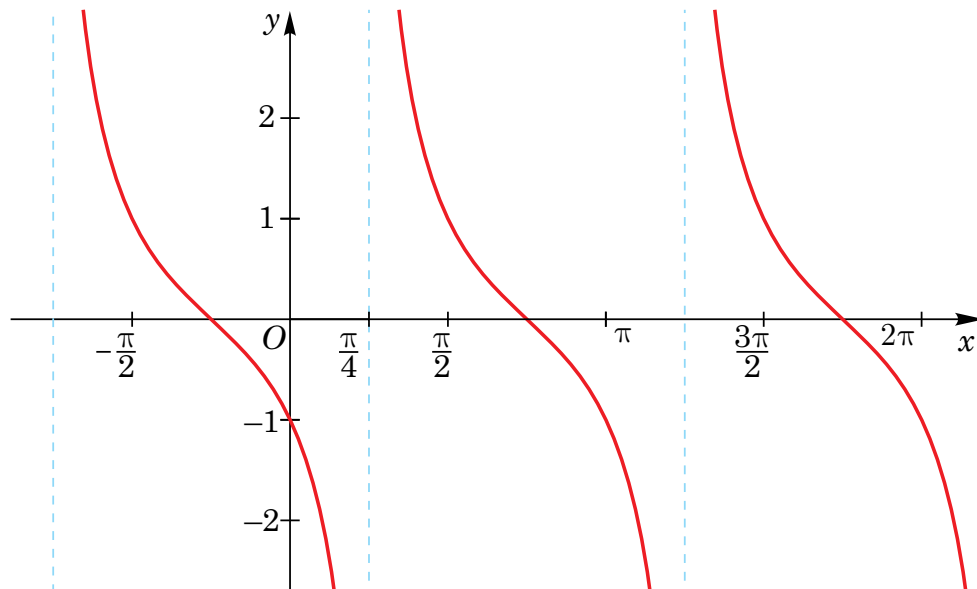
3. Заповніть таблицю:

α	720°	225°	300°	870°	900°	-330°	-660°	-210°
$\operatorname{tg} \alpha$								
$\operatorname{ctg} \alpha$								

4. Які з чисел $-\frac{3\pi}{2}$, $-\pi$, $-\frac{\pi}{2}$, 0 , $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, 3π :

- 1) є розв'язками рівняння $\operatorname{ctg} x = 0$;
- 2) не належать області визначення функції $y = \operatorname{ctg} x$?

5. За графіком функції $y = \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ (див. рисунок) дослідіть її властивості.



6. Обчисліть:

$$1) 2 \sin \frac{\pi}{4} - 3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg} \left(-\frac{3\pi}{2} \right) - \operatorname{tg} \pi; \quad 2) 3 \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4} \right) + 2 \sin \frac{\pi}{4} - 3 \operatorname{tg} 0 - 2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}.$$

Рівень В

1. Розташуйте числа в порядку спадання:

$$1) \operatorname{tg}(-0,3), \operatorname{tg} 0,3, \operatorname{tg} 2, \operatorname{tg} 1, \operatorname{tg} 3; \quad 2) \operatorname{ctg} 1, \operatorname{ctg} 2, \operatorname{ctg} 3, \operatorname{ctg} 4, \operatorname{ctg} 5.$$

2. На яких проміжках функції $y = \operatorname{tg} x$ та $y = \operatorname{ctg} x$ одночасно додатні?

3. Побудуйте графік функції. Укажіть область визначення функції:

$$1) y = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x}; \quad 2) y = \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} x}.$$

4. Побудуйте графік функції $y = -\operatorname{tg} x$ на проміжку $[-4\pi; 0]$ та укажіть проміжки монотонності та проміжки знакосталості цієї функції.

5. Побудуйте графік функції $y = -\operatorname{ctg} x$ на проміжку $[0; 4\pi]$ та укажіть проміжки монотонності та проміжки знакосталості цієї функції.

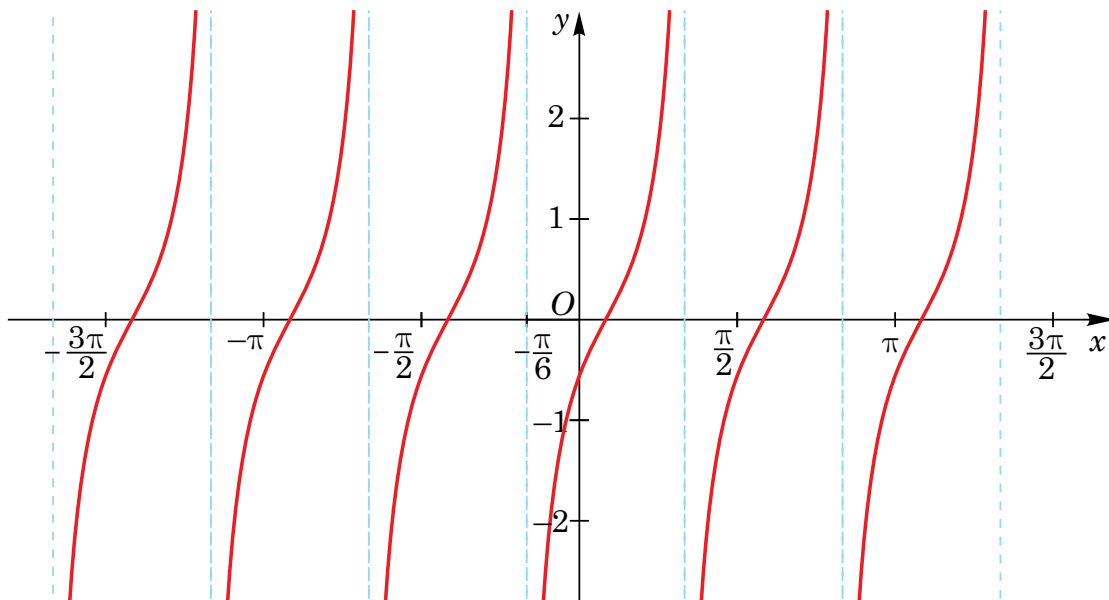
6. Дослідіть функцію на парність:

$$1) y = \operatorname{tg} x + \sin x; \quad 2) y = x^3 \cos x + \operatorname{ctg} x; \\ 3) y = x \sin x + x^3 \operatorname{tg} x; \quad 4) y = x^2 \sin x - x^4 \operatorname{ctg} x.$$

7. Заповніть таблицю:

α	$\frac{13\pi}{3}$	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{13\pi}{4}$	$\frac{20\pi}{3}$	$\frac{55\pi}{4}$	$-\frac{11\pi}{2}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{17\pi}{3}$
$\operatorname{tg} \alpha$								
$\operatorname{ctg} \alpha$								

8. За графіком функції $y = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ (див. рисунок) дослідіть її властивості.



9. Чи можлива рівність:

1) $\cos \alpha = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{18}$;

2) $\cos \alpha = \operatorname{tg} \frac{\pi}{9}$?

10. Для кутів $0 \leq \alpha < 2\pi$ знайдіть усі значення α для яких:

1) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

2) $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

3) $\operatorname{ctg} \alpha = -\sqrt{3}$;

4) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$.

11. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} \operatorname{ctg} x, x \geq -\frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg} x, x < -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$

12. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{|x|}{x} \operatorname{ctg} x$;

2) $y = \operatorname{tg} x + |\operatorname{tg} x|$.

Рівень С

1. Дослідіть на парність функцію:

1) $y = \operatorname{tg}(5x - x^3)$;

2) $y = \operatorname{ctg}|x - x^3|$;

3) $y = \operatorname{tg} x + |\operatorname{ctg} x|$;

4) $y = \operatorname{ctg}(x + |x|) - \operatorname{ctg}(x - |x|)$.

2. Побудуйте графік функції. Укажіть проміжки, на яких функція додатна:

1) $y = \frac{|\operatorname{ctg} x|}{\operatorname{ctg} x}$;

2) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{|\operatorname{tg} x|}$.

3. Визначте знак добутку $\operatorname{tg} 3 \cdot \operatorname{ctg} 2 \cos 1$.

4. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{-\operatorname{ctg}^2 x}$;

2) $y = \operatorname{tg} x + \sqrt{\operatorname{tg}^2 x}$.

5. Побудуйте графік функції $y = |\operatorname{tg} x|$ та опишіть її основні властивості.

6. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \frac{1}{x} \sqrt{-\operatorname{tg}^2 3x}$;

2) $y = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}$.

7. **Творче завдання.** Створіть проект у вигляді веб сторінки або застосунку, який дозволяє користувачеві вивчати властивості функцій $y = \operatorname{tg} x$ та $y = \operatorname{ctg} x$.

Рефлексія

- | | | | |
|----|--|------------------------|----|
| 1. | Я вмію будувати графік функції $y = \operatorname{tg} x$. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я знаю основні властивості графіка функції $y = \operatorname{tg} x$. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я вмію будувати графік функції $y = \operatorname{ctg} x$. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я знаю основні властивості графіка функції $y = \operatorname{ctg} x$. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я знаю, як описувати основні властивості функції за її графіком. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

1. Історичний розвиток понять тангенса і котангенса.
2. Тангенси у фізиці, в техніці, в навігації.
3. Використання властивостей тангенсоїди й котангенсоїди для розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь і нерівностей.
4. Використання тангенса й котангенса у створенні математичних моделей прикладних задач.
5. Графіки функції тангенса і функції котангенса в полярних координатах.



