

11

Тема 1.

Повторення властивостей тригонометричних функцій

Урок 3. Тригонометричні функції тангенс і котангенс та їхні властивості

Тип уроку: урок узагальнення та систематизації знань.

План уроку

1. Функція тангенс. Графік функції та властивості.
2. Функція котангенс. Графік функції та властивості.
3. Дослідження властивостей функцій, що містять тангенс та котангенс.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

упорядковує та перетворює інформацію математичного змісту в специфічних проблемних ситуаціях, зокрема із застосуванням інформаційних технологій [12 МАО 2.1.3–1 П];

обирає математичну модель розв'язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов [12 МАО 3.2.2–1 П];

добирає доцільні математичні поняття, факти і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого. Завдання можна розв'язувати усно.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.

6) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чи існують природні явища, які моделюються за допомогою функції тангенс і функції котангенс?

2) Чому тангенс і котангенс не визначені для деяких кутів?

3) Уявіть, що точка рухається по одиничному колу зі швидкістю світла. З якою швидкістю рухатиметься відповідна їй точка на осі тангенсів?

4) Для яких кутів можна оцінити їхні тангенси без використання калькулятора?

5) Чи можна використати графіки, подібні до графіків функції тангенса і функції котангенса, при створенні анімацій у фільмах та відеоіграх?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Укажіть головний період функції $y = \operatorname{ctg} 7x$.

Відповідь. $\frac{\pi}{7}$.

2. Укажіть градусні міри кутів α ($0^\circ < \alpha < 360^\circ$) таких, для яких $\operatorname{ctg} \alpha = 0$.

Відповідь. 90° і 270° .

3. Укажіть градусні міри кутів α ($0^\circ < \alpha < 360^\circ$) таких, для яких $\operatorname{tg} \alpha = 1$.

Відповідь. 45° і 225° .

4. Задано функцію $f(x) = x^{41}$, порівняйте $f(-6, 2)$ та $f(-5, 8)$.

Відповідь. $f(-6, 2) < f(-5, 8)$.

5. Якій координатній чверті належить точка, що відповідає куту $-\frac{5\pi}{4}$?

Відповідь. Другій.

Як я вирішую певну проблему?

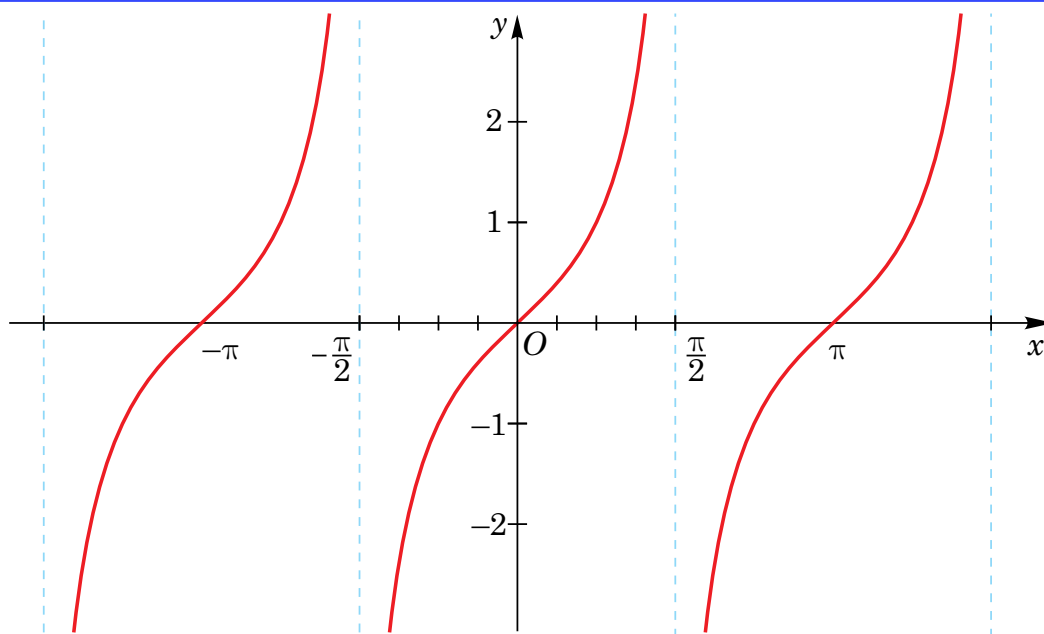
Задача 1. Військовому катеру потрібно перетнути річку завширшки $s = 70$ м, береги якої можна зобразити у вигляді паралельних прямих так, аби причалити точно навпроти місця відправлення. Швидкість течії річки $v = 0,5$ м/с. Час, що вимірюється в секундах, обчислюється за формулою $t = \frac{s}{v} \operatorname{ctg} \alpha$, де α — гострий кут між напрямком руху катера та береговою лінією. Під яким найменшим кутом α (у радіанах) до берега потрібно рухатися катеру, щоб час руху не перевищував 140 с?

Задача 2. Олімпіадна задача. В опуклому чотирикутнику тангенс одного з його кутів дорівнює m .

- 1) Чи можуть тангенси трьох решти його кутів дорівнювати m ?
- 2) Чи можуть тангенси усіх кутів чотирикутника бути рівними, якщо чотирикутник неопуклий? Відповідь обґрунтуйте.

III. Функція тангенс. Графік функції та її властивості

Означення. Графік функції $y = \operatorname{tg} x$ називається *тангенсоїдою*.

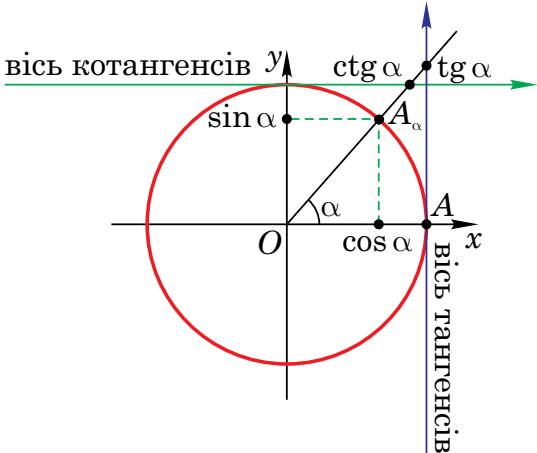


Для повторення взаємозалежності між тангенсоїдою та одиничним колом скористайтеся Geogebra-аплетом:

<https://www.geogebra.org/m/asckby9g>



Властивості функції $y = \operatorname{tg} x$

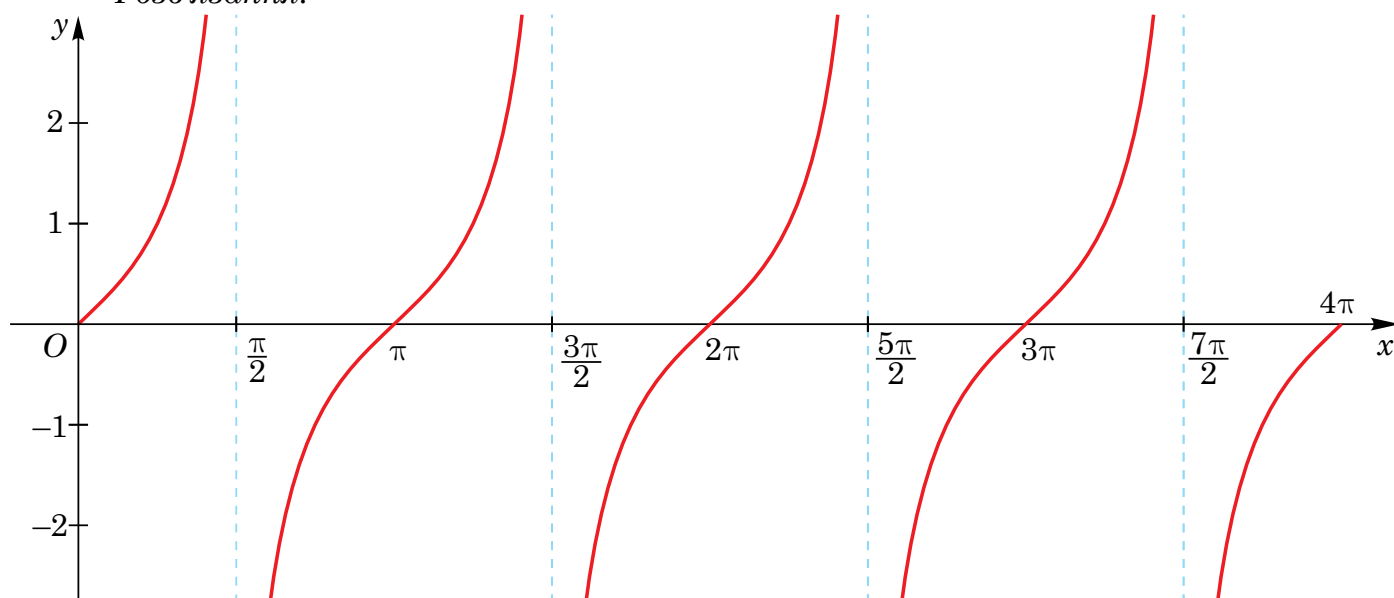
Область визначення	Множина всіх дійсних чисел, окрім чисел виду $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Прямі, що задаються рівняннями $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, називають <i>асимптотами</i> .
Область значень	$E(y) = (-\infty; +\infty)$.
Найбільше значення функції	 Тангенс може бути будь-яким дійсним числом, тому що це ордината точки перетину прямих $y = kx$ та $x = 1$.
Найменше значення функції	
Нулі функції	$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
Парність та непарність функції	Функція непарна. Графік функції симетричний відносно початку координат.
Періодичність функції	Функція періодична з головним періодом π .
Проміжки монотонності функції	Зростає на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.
Проміжки знакосталості функцій	$\operatorname{tg} x > 0$ на кожному з проміжків виду $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$. $\operatorname{tg} x < 0$ на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.

Ілюстративні приклади

- 6.** Розташуйте числа за спаданням: $\operatorname{tg}(-47^\circ)$; $\operatorname{tg}(-21^\circ)$; $\operatorname{tg}(-230^\circ)$; $\operatorname{tg} 322^\circ$.
- Розв'язання.* 1) $\operatorname{tg}(-230^\circ) = \operatorname{tg}(-230^\circ + 180^\circ) = \operatorname{tg}(-50^\circ)$.
 2) $\operatorname{tg} 322^\circ = \operatorname{tg}(322^\circ - 360^\circ) = \operatorname{tg}(-38^\circ)$.
 3) Усі кути $-47^\circ, -21^\circ, -50^\circ$ та -38° належать четвертій чверті, в якій функція тангенс є зростаючою, тому $\operatorname{tg}(-21^\circ) > \operatorname{tg} 322^\circ > \operatorname{tg}(-47^\circ) > \operatorname{tg}(-230^\circ)$.
- Відповідь.* $\operatorname{tg}(-21^\circ), \operatorname{tg} 322^\circ, \operatorname{tg}(-47^\circ), \operatorname{tg}(-230^\circ)$.

7. Побудуйте графік функції $y = \operatorname{tg} x$, що визначена на проміжку $[0; 4\pi]$, та вкажіть нулі функції й точки, в яких функція не визначена.

Розв'язання.



Нулі функції: $0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi$.

Точки, в яких функція не визначена: $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$.

8. Дослідіть функцію $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x + |x| \sin x}{2}$ на парність.

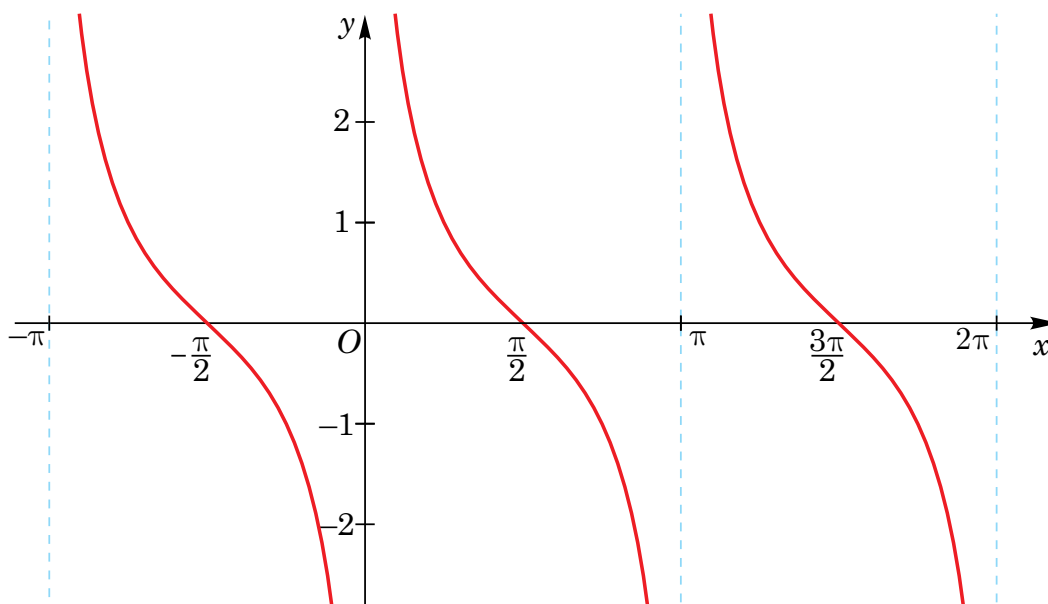
Розв'язання.
$$f(-x) = \frac{\operatorname{tg}(-x) + |-x| \sin(-x)}{2} = \frac{-\operatorname{tg} x - |x| \sin x}{2} = -\frac{\operatorname{tg} x + |x| \sin x}{2} = -f(x).$$

Отже, функція непарна.

Відповідь. Функція непарна.

IV. Функція котангенс. Графік функції та її властивості

Означення. Графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ називається **котангенсоїдою**.



Для повторення взаємозалежності між котангенсоїдою та одиничним колом скористайтеся Geogebra-аплетом:

<https://www.geogebra.org/m/ryt5wgch>



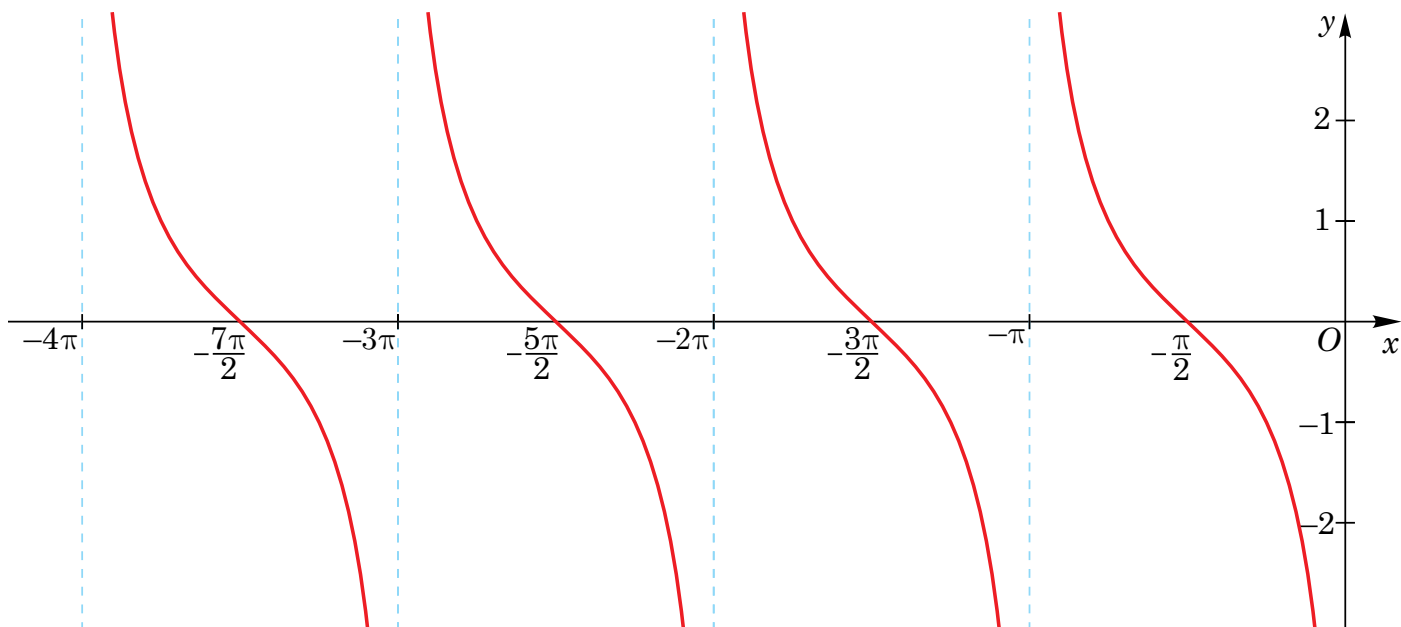
Властивості функції $y = \operatorname{ctg} x$

Область визначення	Множина всіх дійсних чисел, окрім чисел виду $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Прямі, що задаються рівнянням $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, називають <i>асимптотами</i> .
Область значень	$E(y) = (-\infty; +\infty)$.
Найбільше значення функції	Котангенс може бути будь-яким дійсним числом, тому що це абсциса точки перетину прямих $y = kx$ та $y = 1$.
Найменше значення функції	
Нулі функції	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
Парність та непарність функції	Функція непарна. Графік функції симетричний відносно початку координат.
Періодичність функції	Функція періодична з головним періодом π .
Проміжки монотонності функції	Спадає на кожному з проміжків виду $(\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.
Проміжки знакосталості функцій	$\operatorname{ctg} x > 0$ на кожному з проміжків виду $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$. $\operatorname{ctg} x < 0$ на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ілюстративні приклади

9. Побудуйте графік функції $y = \operatorname{ctg} x$, що визначена на проміжку $[-4\pi; 0]$, та вкажіть її нулі та проміжки знакосталості.

Розв'язання. 1) Графік функції (див. рисунок):



2) Нулі функції: $-\frac{7\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$.

3) Функція додатна на проміжках: $\left(-4\pi; -\frac{7\pi}{2}\right), \left(-3\pi; -\frac{5\pi}{2}\right), \left(-2\pi; -\frac{3\pi}{2}\right), \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$.

4) Функція від'ємна на проміжках: $\left(-\frac{7\pi}{2}; -3\pi\right), \left(-\frac{5\pi}{2}; -2\pi\right), \left(-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right), \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

10. Знайдіть значення кутів α . Заповніть таблицю.

α	$\frac{11\pi}{3}$	$-\frac{11\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{2}$	$-\frac{11\pi}{6}$
$\operatorname{tg} \alpha$				
$\operatorname{ctg} \alpha$				

Розв'язання.

1) Для кута $\frac{11\pi}{3}$:

$$\operatorname{tg} \frac{11\pi}{3} = \operatorname{tg} \left(4\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{3} \right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg} \frac{11\pi}{3} = \operatorname{ctg} \left(4\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{3} \right) = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2) Для кута $-\frac{11\pi}{4}$:

$$\operatorname{tg} \left(-\frac{11\pi}{4} \right) = -\operatorname{tg} \left(3\pi - \frac{\pi}{4} \right) = -\operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1,$$

$$\operatorname{ctg} \left(-\frac{11\pi}{4} \right) = -\operatorname{ctg} \left(3\pi - \frac{\pi}{4} \right) = -\operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1.$$

3) Для кута $\frac{11\pi}{2}$:

$$\operatorname{tg} \frac{11\pi}{2} = \operatorname{tg} \left(6\pi - \frac{\pi}{2} \right) = \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{2} \right) - \text{не існує},$$

$$\operatorname{ctg} \frac{11\pi}{2} = \operatorname{ctg} \left(6\pi - \frac{\pi}{2} \right) = \operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{2} \right) = 0.$$

4) Для кута $-\frac{11\pi}{6}$:

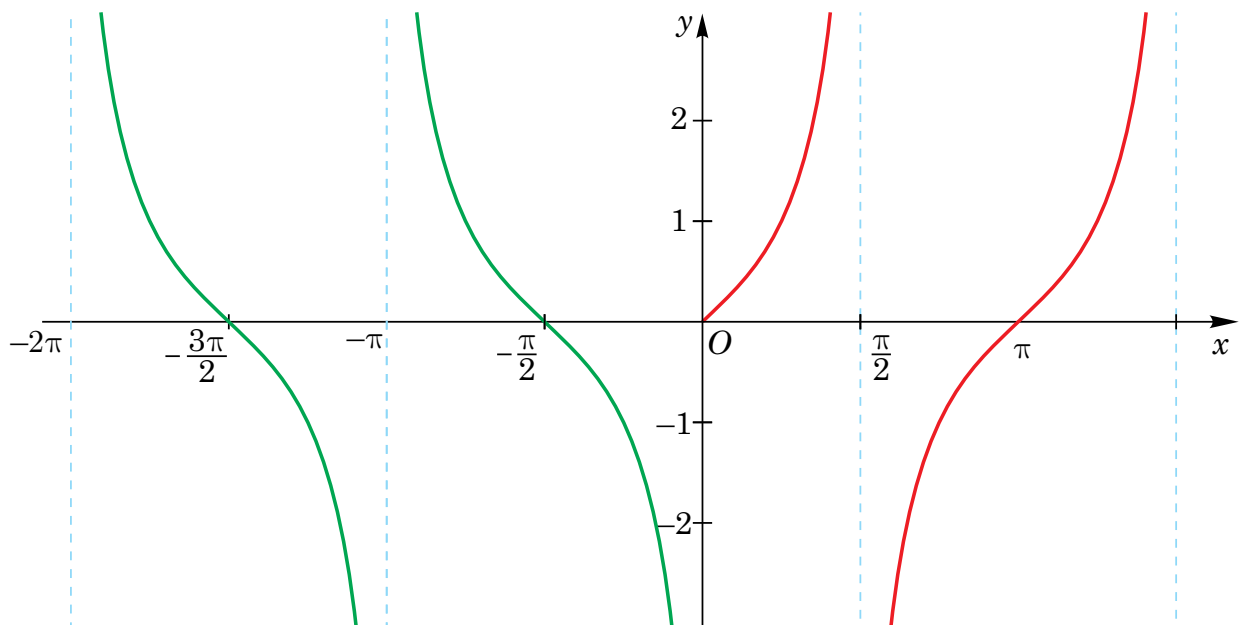
$$\operatorname{tg} \left(-\frac{11\pi}{6} \right) = -\operatorname{tg} \left(2\pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{6} \right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{ctg} \left(-\frac{11\pi}{6} \right) = -\operatorname{ctg} \left(2\pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{6} \right) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}.$$

α	$\frac{11\pi}{3}$	$-\frac{11\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{2}$	$-\frac{11\pi}{6}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$-\sqrt{3}$	1	—	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	0	$\sqrt{3}$

- 11.** Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & x \geq 0, \\ \operatorname{ctg} x, & x < 0. \end{cases}$

Розв'язання.



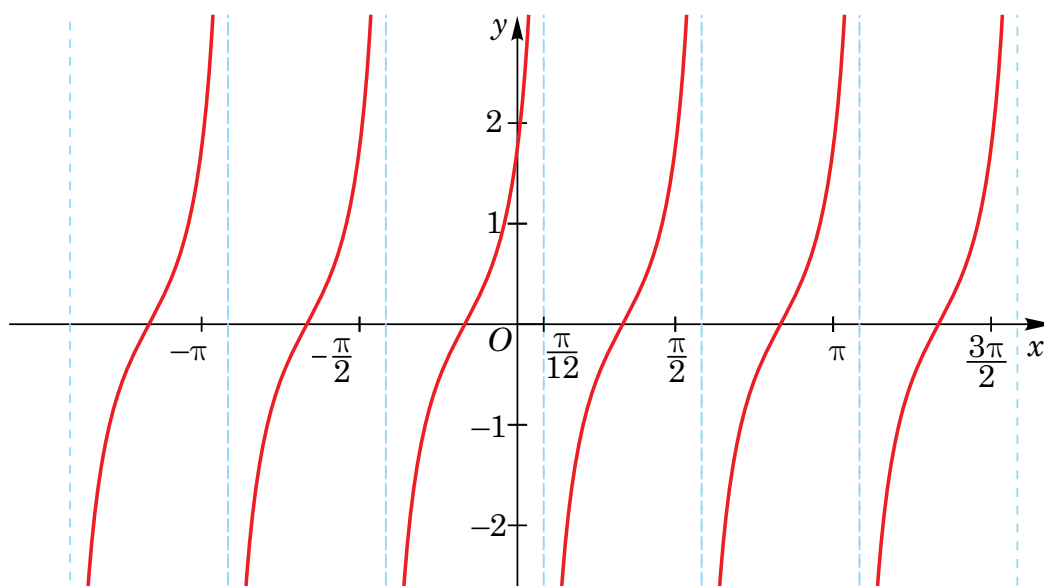
V. Дослідження властивостей функцій, що містять тангенс та котангенс

Орієнтовна послідовність дій для дослідження властивостей функцій за їхніми графіками.

1. Знайдіть область визначення функції.
2. Знайдіть множину значень функції.
3. Дослідіть функцію на парність.
4. Дослідіть функцію на періодичність.
5. Знайдіть нулі функції.
6. Укажіть проміжки знакосталості функції.
7. Укажіть проміжки монотонності функції.

Ілюстративні приклади

- 12.** За графіком функції $y = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$ (див. рисунок) дослідіть її властивості.



Розв'язання. 1) Областю визначення функції є всі дійсні числа, крім чисел виду

$$\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

2) Множиною значень є множина всіх дійсних чисел.

3) Функція ні парна, ні непарна.

4) Функція періодична з головним періодом $\frac{\pi}{2}$.

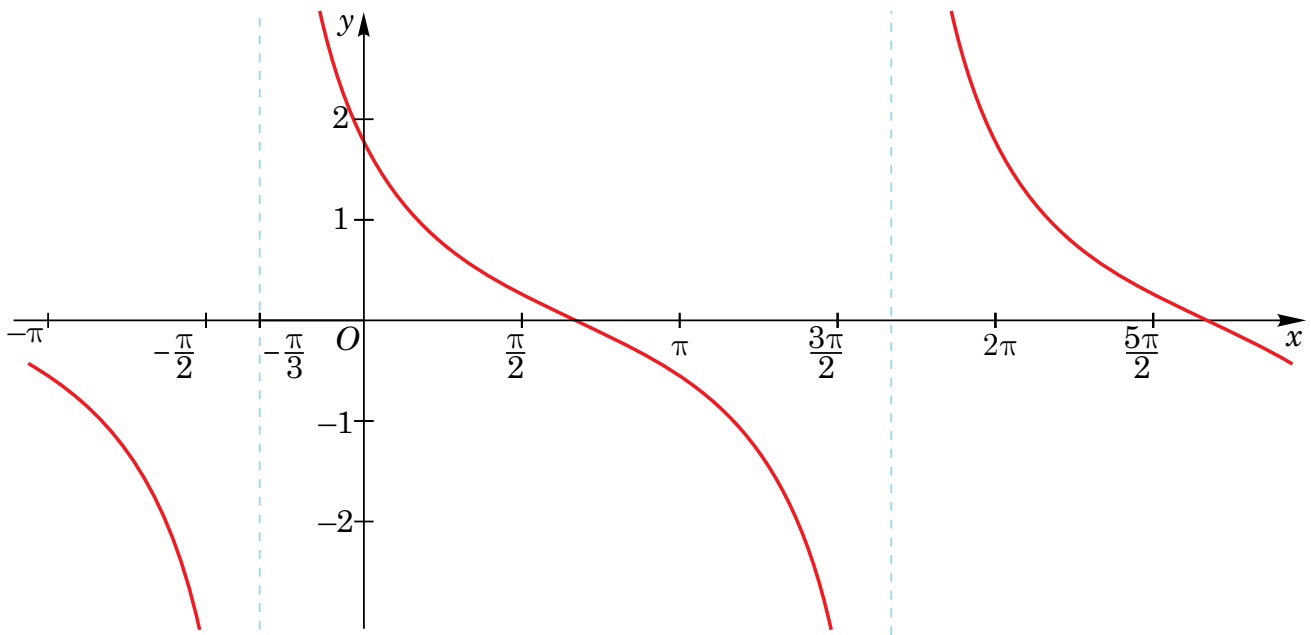
5) Нулі функції — числа виду $x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

6) Функція додатна на кожному з проміжків виду $\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}; \frac{7\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}\right), n \in \mathbb{Z}$, і від'єм-

на на кожному з проміжків виду $\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}; \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}\right), n \in \mathbb{Z}$.

7) Функція зростає на кожному з проміжків виду $\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}; \frac{7\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

13. За графіком функції $y = -\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$ (див. рисунок) дослідіть її властивості.



Розв'язання. 1) Областю визначення функції є всі дійсні числа, крім чисел виду $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2) Множиною значень є множина всіх дійсних чисел.

3) Функція ні парна, ні непарна.

4) Функція періодична з головним періодом 2π .

5) Нулі функції — числа виду $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

6) Функція додатна на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$,

і від'ємна на кожному з проміжків виду $\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

7) Функція спадає на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

14. Знайдіть нулі функції $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Розв'язання. Нулі функції $y = \operatorname{tg} x$ є числа виду πn , $n \in \mathbb{Z}$.

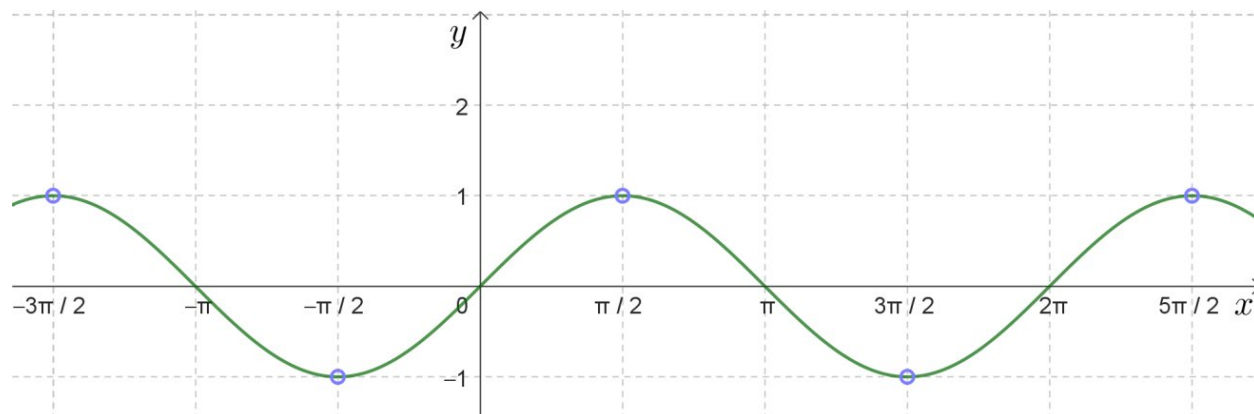
Тому $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$ при $\frac{x}{2} = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, тобто $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

15. Побудуйте графік функції $y = \operatorname{tg} x \cdot \cos x$.

Розв'язання. Областю визначення функції є множина усіх дійсних чисел крім чисел виду $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

За означенням $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, тому графік даної функції збігається з графіком функції $y = \sin x$ в усіх точках крім $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.



VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

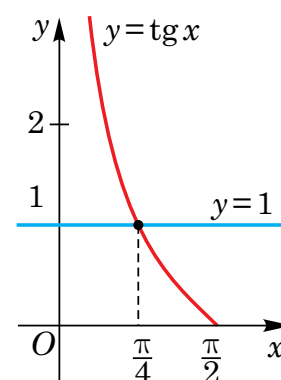
Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Військовому катеру потрібно перетнути річку завширшки $s = 70$ м, береги якої можна зобразити у вигляді паралельних прямих так, аби причалити точно навпроти місця відправлення. Швидкість течії річки $v = 0,5$ м/с. Час, що вимірюється в секундах, обчислюється за формулою $t = \frac{s}{v} \operatorname{ctg} \alpha$, де α — гострий кут між напрямком руху катера та береговою лінією. Під яким найменшим кутом α (у радіанах) до берега потрібно рухатися катеру, щоб час руху не перевищував 140 с?

Розв'язання. 1) Оскільки $t \leq 140$, то $\frac{70}{0,5} \operatorname{ctg} \alpha \leq 140$, звідки $\operatorname{ctg} \alpha \leq 1$.

2) Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \operatorname{ctg} x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) та $y = 1$.

3) Найменше значення кута, що задовольнятиме нерівність $\operatorname{ctg} \alpha \leq 1$, дорівнює $\frac{\pi}{4}$ (див. графік).



Відповідь. $\frac{\pi}{4}$.

Задача 2. Олімпіадна задача. В опуклому чотирикутнику тангенс одного з його кутів дорівнює m .

1) Чи можуть тангенси трьох решти його кутів дорівнювати m ?

2) Чи можуть тангенси усіх кутів чотирикутника бути рівними, якщо чотирикутник неопуклий? Відповідь обґрунтуйте.

Розв'язання. 1) Із умови випливає, що жоден із кутів не є прямим, бо інакше тангенс такого кута не існує.

Оскільки сума кутів опуклого чотирикутника дорівнює 360° , то серед чотирьох його кутів є принаймні один гострий і принаймні один тупий. Тангенс гострого кута додатний, а тангенс тупого від'ємний. Отже, тангенси всіх чотирьох кутів не можуть дорівнювати m .

2) Розглянемо неопуклий чотирикутник з кутами 45° , 45° , 45° та 225° , тангенси яких дорівнюють 1.

Відповідь. 1) Не можуть. 2) Можуть.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Порівняйте:

1) $\operatorname{ctg} 1,7\pi$ і $\operatorname{ctg} 1,68\pi$;

2) $\operatorname{tg} 32^\circ$ і $\operatorname{tg} 31^\circ$;

3) $\operatorname{ctg} 32^\circ$ і $\operatorname{ctg} 33^\circ$;

4) $\operatorname{tg} \frac{4\pi}{3}$ і $\operatorname{tg} \frac{23\pi}{18}$.

2. Укажіть найменший додатний період функції:

1) $y = \operatorname{tg} 4x$;

2) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{4}$;

3) $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{6}$;

4) $y = \operatorname{ctg} 6x$.

3. Заповніть таблицю:

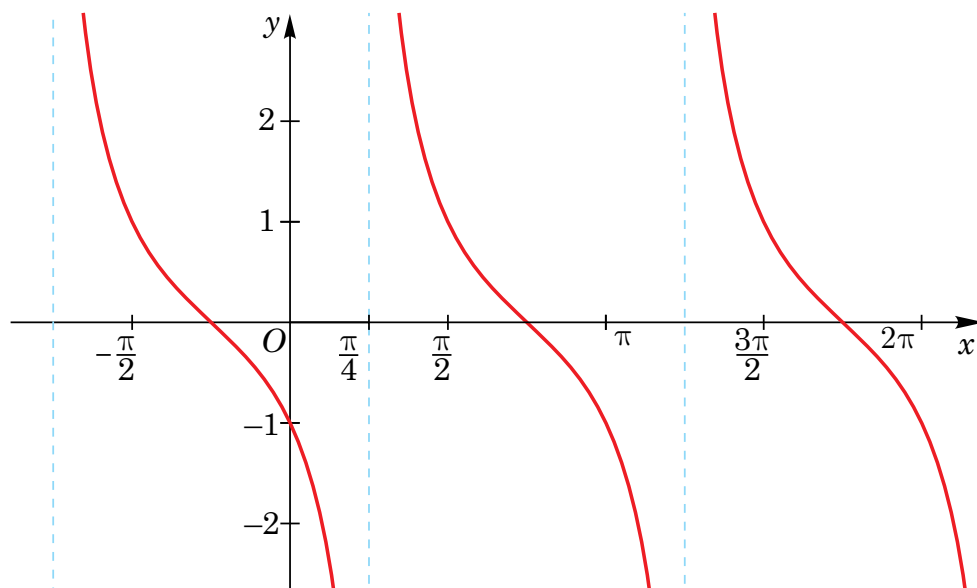
α	720°	225°	300°	870°	900°	-330°	-660°	-210°
$\operatorname{tg} \alpha$								
$\operatorname{ctg} \alpha$								

4. Які з чисел $-\frac{3\pi}{2}$, $-\pi$, $-\frac{\pi}{2}$, 0 , $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, 3π :

1) є розв'язками рівняння $\operatorname{ctg} x = 0$;

2) не належать області визначення функції $y = \operatorname{ctg} x$?

5. За графіком функції $y = \operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$ (див. рисунок) дослідіть її властивості.



6. Обчисліть:

$$1) 2\sin\frac{\pi}{4} - 3\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{2}\right) - \operatorname{tg}\pi; \quad 2) 3\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2\sin\frac{\pi}{4} - 3\operatorname{tg}0 - 2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}.$$

Рівень В

1. Розташуйте числа в порядку спадання:

$$1) \operatorname{tg}(-0,3), \operatorname{tg}0,3, \operatorname{tg}2, \operatorname{tg}1, \operatorname{tg}3; \quad 2) \operatorname{ctg}1, \operatorname{ctg}2, \operatorname{ctg}3, \operatorname{ctg}4, \operatorname{ctg}5.$$

2. На яких проміжках функції $y = \operatorname{tg} x$ та $y = \operatorname{ctg} x$ одночасно додатні?

3. Побудуйте графік функції. Укажіть область визначення функції:

$$1) y = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x}; \quad 2) y = \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} x}.$$

4. Побудуйте графік функції $y = -\operatorname{tg} x$ на проміжку $[-4\pi; 0]$ та укажіть проміжки монотонності та проміжки знакосталості цієї функції.

5. Побудуйте графік функції $y = -\operatorname{ctg} x$ на проміжку $[0; 4\pi]$ та укажіть проміжки монотонності та проміжки знакосталості цієї функції.

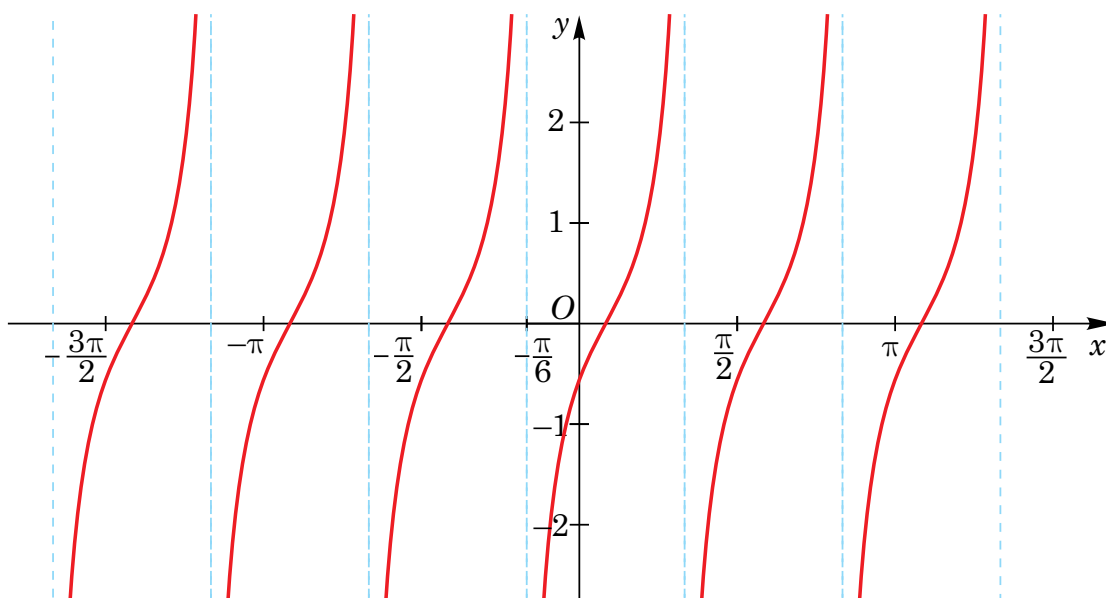
6. Дослідіть функцію на парність:

$$1) y = \operatorname{tg} x + \sin x; \quad 2) y = x^3 \cos x + \operatorname{ctg} x; \\ 3) y = x \sin x + x^3 \operatorname{tg} x; \quad 4) y = x^2 \sin x - x^4 \operatorname{ctg} x.$$

7. Заповніть таблицю:

α	$\frac{13\pi}{3}$	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{13\pi}{4}$	$\frac{20\pi}{3}$	$\frac{55\pi}{4}$	$-\frac{11\pi}{2}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{17\pi}{3}$
$\operatorname{tg} \alpha$								
$\operatorname{ctg} \alpha$								

8. За графіком функції $y = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ (див. рисунок) дослідіть її властивості.



9. Чи можлива рівність:

1) $\cos \alpha = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{18}$;

2) $\cos \alpha = \operatorname{tg} \frac{\pi}{9}$?

10. Для кутів $0 \leq \alpha < 2\pi$ знайдіть усі значення α для яких:

1) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

2) $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

3) $\operatorname{ctg} \alpha = -\sqrt{3}$;

4) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$.

11. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} \operatorname{ctg} x, x \geq -\frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg} x, x < -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$

12. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{|x|}{x} \operatorname{ctg} x$;

2) $y = \operatorname{tg} x + |\operatorname{tg} x|$.

Рівень С

1. Дослідіть на парність функцію:

1) $y = \operatorname{tg}(5x - x^3)$;

2) $y = \operatorname{ctg}|x - x^3|$;

3) $y = \operatorname{tg} x + |\operatorname{ctg} x|$;

4) $y = \operatorname{ctg}(x + |x|) - \operatorname{ctg}(x - |x|)$.

2. Побудуйте графік функції. Укажіть проміжки, на яких функція додатна:

1) $y = \frac{|\operatorname{ctg} x|}{\operatorname{ctg} x}$;

2) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{|\operatorname{tg} x|}$.

3. Визначте знак добутку $\operatorname{tg} 3 \cdot \operatorname{ctg} 2 \cos 1$.

4. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{-\operatorname{ctg}^2 x}$;

2) $y = \operatorname{tg} x + \sqrt{\operatorname{tg}^2 x}$.

5. Побудуйте графік функції $y = |\operatorname{tg} x|$ та опишіть її основні властивості.

6. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \frac{1}{x} \sqrt{-\operatorname{tg}^2 3x}$;

2) $y = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}$.

7. **Творче завдання.** Створіть проект у вигляді веб сторінки або застосунку, який дозволяє користувачеві вивчати властивості функцій $y = \operatorname{tg} x$ та $y = \operatorname{ctg} x$.

VIII. Рефлексія (1–2 хв)

1. Я вмію будувати графік функції $y = \operatorname{tg} x$.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

2. Я знаю основні властивості графіка функції $y = \operatorname{tg} x$.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

3. Я вмію будувати графік функції $y = \operatorname{ctg} x$.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

- | | | | |
|-----------|--|------------------------|----|
| 4. | Я знаю основні властивості графіка функції $y = \operatorname{ctg} x$. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я знаю, як описувати основні властивості функції за її графіком. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

- 1.** Історичний розвиток понять тангенса і котангенса.
- 2.** Тангенси у фізиці, в техніці, в навігації.
- 3.** Використання властивостей тангенсоїди й котангенсоїди для розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь і нерівностей.
- 4.** Використання тангенса й котангенса у створенні математичних моделей прикладних задач.
- 5.** Графіки функції тангенса і функції котангенса в полярних координатах.