

11

Тема 1.

Повторення властивостей тригонометричних функцій

Урок 4. Побудова графіків тригонометричних функцій та дослідження їхніх властивостей

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) повторите, як будувати графіки функцій $y = A\sin(kx + b)$ та $y = A\cos(kx + b)$ з використанням перетворень графіків функцій синуса та косинуса;
- 2) пригадаєте, як задається гармонічне коливання;
- 3) повторите, як за рівнянням гармонічного коливання знаходити амплітуду, частоту, період, фазу та початкову фазу гармонічного коливання;
- 4) повторите, як будувати графіки функцій $y = A\tg(kx + b)$ та $y = A\ctg(kx + b)$; з використанням перетворень графіків функцій тангенса й котангенса;
- 5) пригадаєте, як описувати основні властивості функції за її графіком;
- 6) пригадаєте, як будувати графіки рівнянь, що містять тригонометричні вирази;
- 7) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Функція $y = f(x)$ є парною. Знайдіть $f(-4)$, якщо $f(4) = -6$.
2. Які з наведених тверджень 1) – 4) правильні?
 - 1) Щоб побудувати графік функції $y = \sqrt{x+2}$, потрібно графік $y = \sqrt{x}$ перенести на дві одиниці вгору по осі Oy .
 - 2) Щоб побудувати графік функції $y = x^2 + 2$, потрібно графік $y = x^2$ перенести на дві одиниці вгору по осі Oy .

3) Щоб побудувати графік функції $y = \sqrt{-x}$, потрібно графік $y = \sqrt{x}$ симетрично відобразити відносно осі Ox .

4) Щоб побудувати графік функції $y = -x^2$, потрібно графік $y = x^2$ симетрично відобразити відносно осі Ox .

3. Обчисліть нулі функції $y = \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}$.

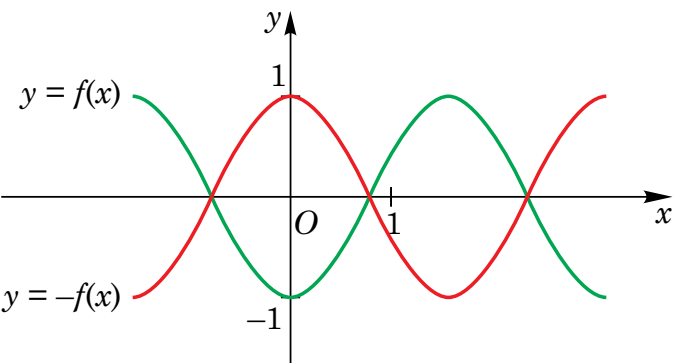
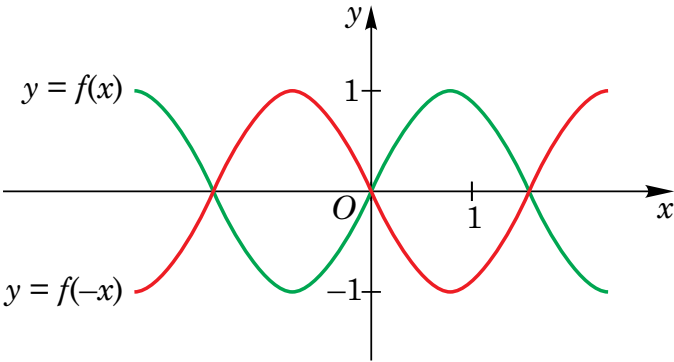
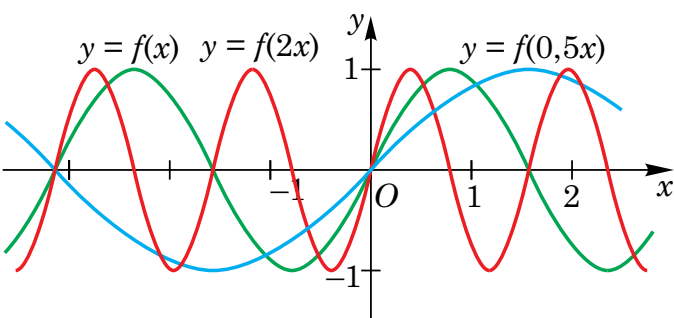
4. Укажіть кількість нулів функції $y = \operatorname{ctg} x$ на проміжку $[-\pi; \pi]$.

5. Укажіть найменший додатний період функції $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(4x)$. (Пробне ЗНО, 2012 р.).

III. Побудова графіків тригонометричних функцій виду

$$y = A \sin(kx + b), y = A \cos(kx + b)$$

Деякі перетворення графіка функції $y = f(x)$

$y = -f(x)$	Симетричне відображення відносно осі абсцис	
$y = f(-x)$	Симетричне відображення відносно осі ординат	
$y = f(kx), k > 1$	Стиск до осі ординат у k разів, тобто відстань від кожної точки графіка $y = f(x)$ до осі ординат зменшується у k разів.	
$y = f(kx), 0 < k < 1$	Розтяг від осі ординат в $\frac{1}{k}$ разів, тобто відстань від кожної точки графіка $y = f(x)$ до осі ординат збільшується в k разів.	

$y = mf(x), m > 1$	Розтяг від осі абсцис у m разів, тобто відстань від кожної точки графіка $y = f(x)$ до осі абсцис збільшується у m разів.	
$y = mf(x), 0 < m < 1$	Стиск до осі абсцис в $\frac{1}{m}$ разів, тобто відстань від кожної точки графіка $y = f(x)$ до осі абсцис зменшується в $\frac{1}{m}$ разів.	
$y = f(x) + a$	Паралельне перенесення вздовж осі ординат на $ a $ одиниць — у додатному напрямі, якщо $a > 0$, та у від'ємному, — якщо $a < 0$.	
$y = f(x + b)$	Паралельне перенесення вздовж осі абсцис на $ b $ одиниць — у додатному напрямі, якщо $b < 0$, та у від'ємному, — якщо $b > 0$.	

1) Будуємо графіки функцій $y = A \sin x$ і $y = A \cos x$ із графіків $y = \sin x$ і $y = \cos x$ за допомогою перетворень $f(x) \rightarrow mf(x)$ та $f(x) \rightarrow -f(x)$.

2) Будуємо графіки функцій $y = A \sin(x + b)$ і $y = A \cos(x + b)$ із графіків функцій $y = A \sin x$ і $y = A \cos x$ за допомогою перетворень $f(x) \rightarrow f(x + b)$.

3) Будуємо графіки функцій $y = A \sin(kx + b)$ і $y = A \cos(kx + b)$ із графіків $y = A \sin(x + b)$ і $y = A \cos(x + b)$ за допомогою перетворень $f(x) \rightarrow f(kx)$ і $f(x) \rightarrow f(-x)$.

Для наочного пояснення можна скористатися Geogebra-аплетом:

<https://www.geogebra.org/m/keh4v9ug>



Гармонічні коливання

Формули $y = A \cos(\omega t + \varphi)$ і $y = A \sin(\omega t + \varphi)$ визначають змінну y як функції часу t . Ці формули визначають гармонічні коливання. У формулах: y — значення функції, t — аргумент функції, числа A , ω і φ — константи, такі, що A — амплітуда коливання,

φ — початкова фаза, ω — кутова швидкість (циклічна частота), $\omega t + \varphi$ — фаза коливання.

Амплітуда визначається в лінійних одиницях довжини, фаза і початкова фаза — у радіанах.

Якщо $\omega > 0$, то $\omega T = 2\pi$, звідси $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Період гармонічного коливання визначається в секундах. Він обернено пропорційний кутовій швидкості відповідного обертання і не залежить ні від амплітуди, ні від початкової фази коливання.

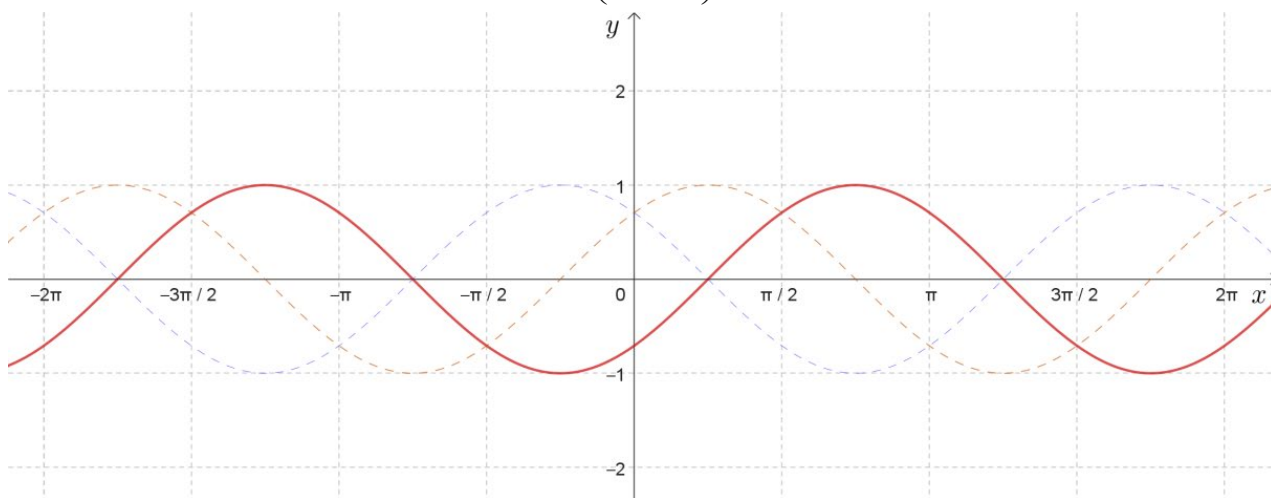
Приклад 1. Побудуйте графік функції $y = -\sin\left(-x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Розв'язання. 1) Виконаємо паралельне перенесення графіка функції $y = \sin x$ уздовж осі Ox на $\frac{\pi}{4}$ одиниці у від'ємному напрямку, отримаємо графік функції

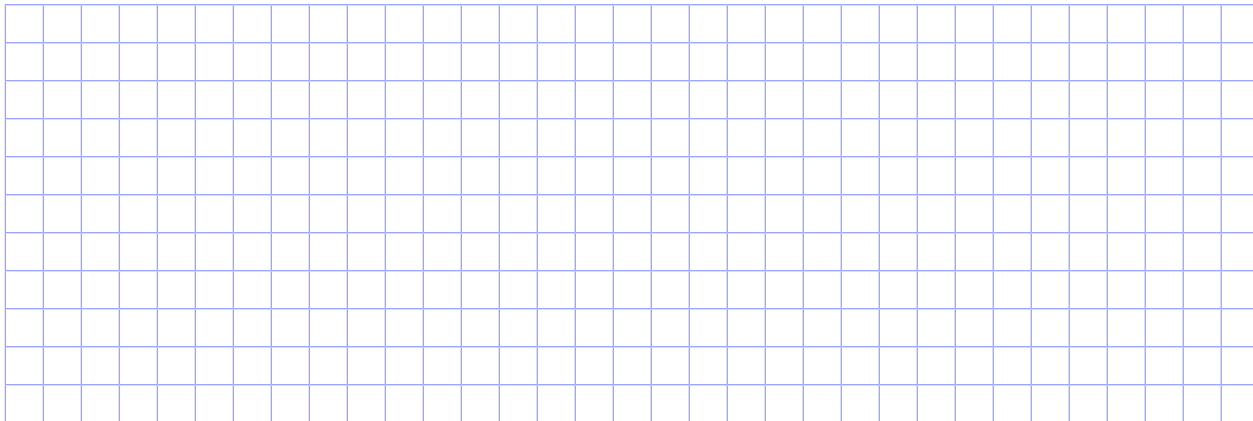
$$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

2) Відобразимо симетрично графік функції $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ відносно осі ординат, отримаємо графік функції $y = \sin\left(-x + \frac{\pi}{4}\right)$.

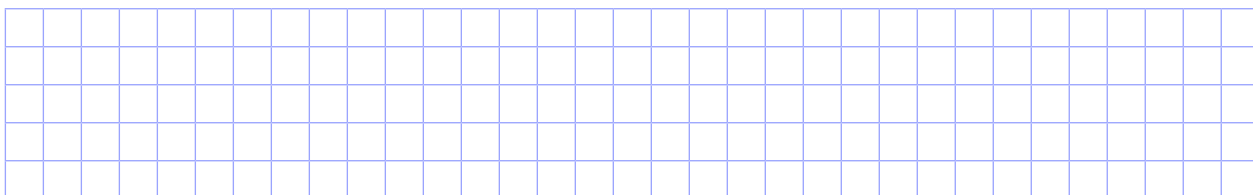
3) Відобразимо симетрично графік функції $y = \sin\left(-x + \frac{\pi}{4}\right)$ відносно осі абсцис, отримаємо графік функції $y = -\sin\left(-x + \frac{\pi}{4}\right)$ (див. рисунок).



Приклад 2. Побудуйте графік функції $y = -2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.



Приклад 3. Укажіть амплітуду, початкову фазу, циклічну частоту та період гармонічного коливання, що задане функцією $y = 7 \cos\left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.



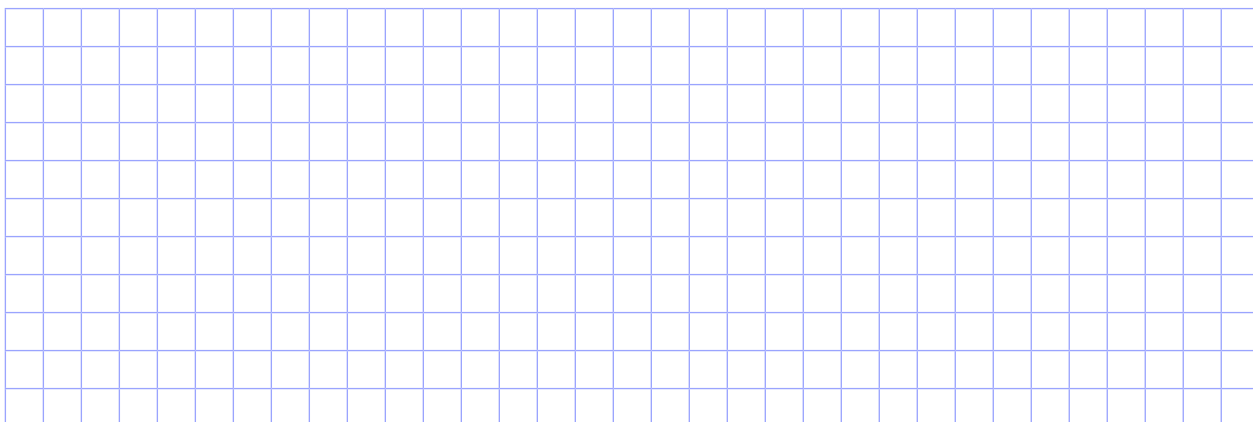
IV. Побудова графіків тригонометричних функцій виду $y = A \operatorname{tg}(kx + b)$, $y = A \operatorname{ctg}(kx + b)$

1) Будуємо графіки функцій $y = A \operatorname{tg} x$ та $y = A \operatorname{ctg} x$ із застосуванням графіків функцій $y = \operatorname{tg} x$ та $y = \operatorname{ctg} x$, за перетвореннями $f(x) \rightarrow kf(x)$ та $f(x) \rightarrow -f(x)$.

2) Будуємо графіки функцій $y = A \operatorname{tg}(x + b)$ та $y = A \operatorname{ctg}(x + b)$ із застосуванням графіків функцій $y = A \operatorname{tg} x$ та $y = A \operatorname{ctg} x$, за перетвореннями $f(x) \rightarrow f(x + b)$.

3) Будуємо графіки функцій $y = A \operatorname{tg}(kx + b)$ та $y = A \operatorname{ctg}(kx + b)$ із застосуванням графіків функцій $y = A \operatorname{tg}(x + b)$ та $y = A \operatorname{ctg}(x + b)$, за перетвореннями $f(x) \rightarrow f(kx)$ та $f(x) \rightarrow f(-x)$.

Приклад 4. Побудуйте графік функції $y = -2 \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.



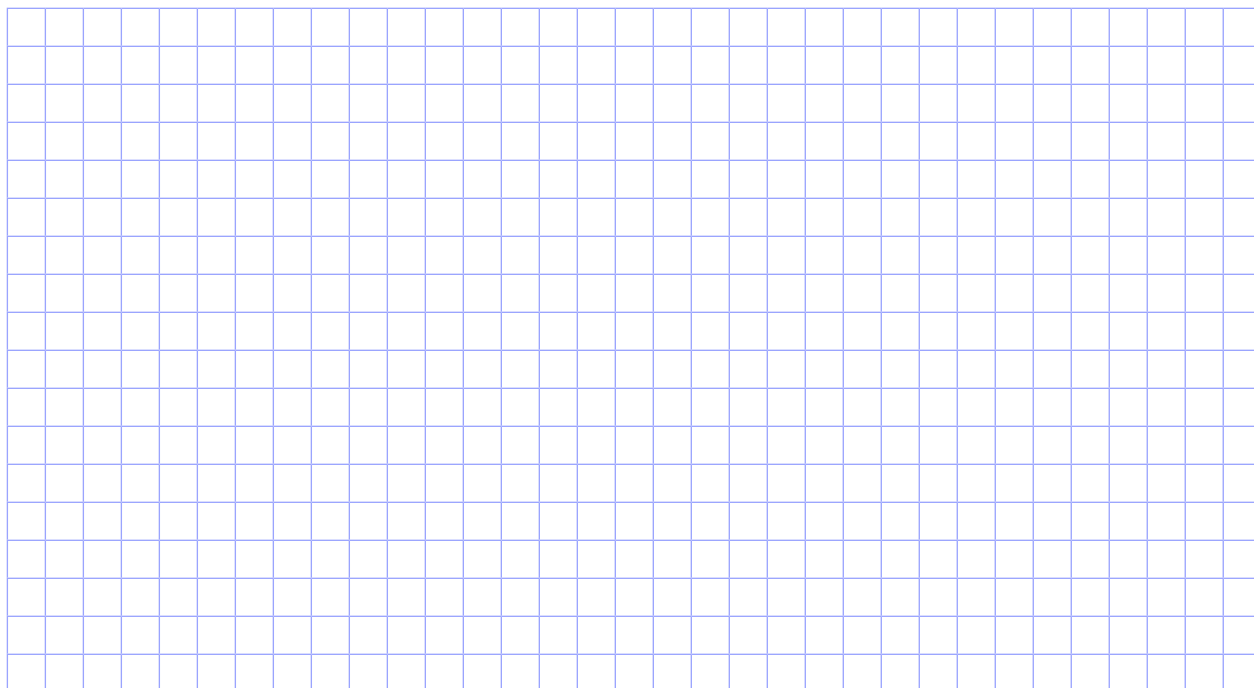
V. Дослідження властивостей функцій за їхніми графіками

Орієнтовна послідовність дій для дослідження властивостей функцій за їхніми графіками.

1. Знайдіть область визначення функції.
2. Знайдіть множину значень функції.
3. Дослідіть функцію на парність.
4. Дослідіть функцію на періодичність.
5. Знайдіть нулі функції.
6. Укажіть проміжки знакосталості функції.
7. Укажіть проміжки монотонності функції.

Примітка. Якщо деякі пункти викликають труднощі, то їх можна пропустити. Наприклад, коли потрібно розв'язувати складне тригонометричне рівняння чи нерівність.

Приклад 5. Побудуйте графік функції $y = \frac{1}{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ та опишіть її основні властивості.



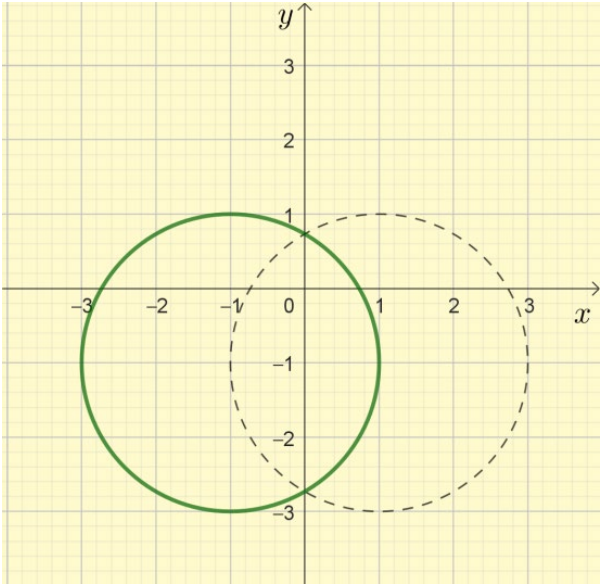
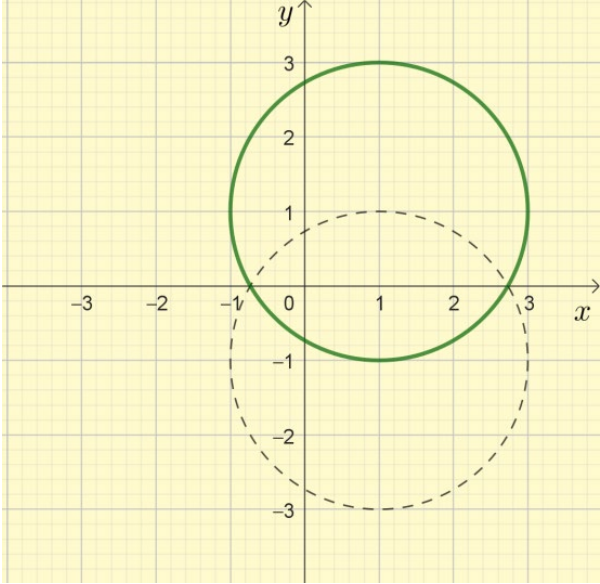
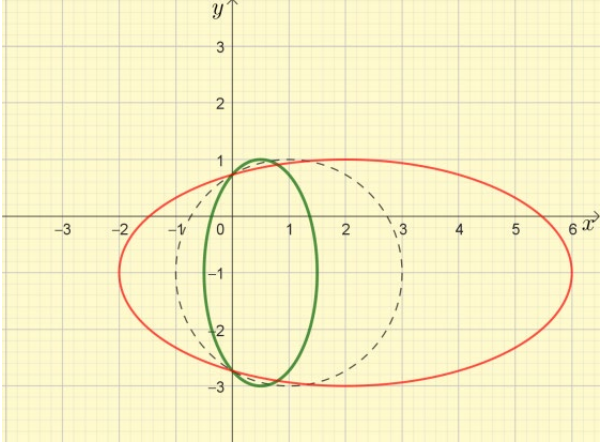
VI. Побудова графіків рівнянь

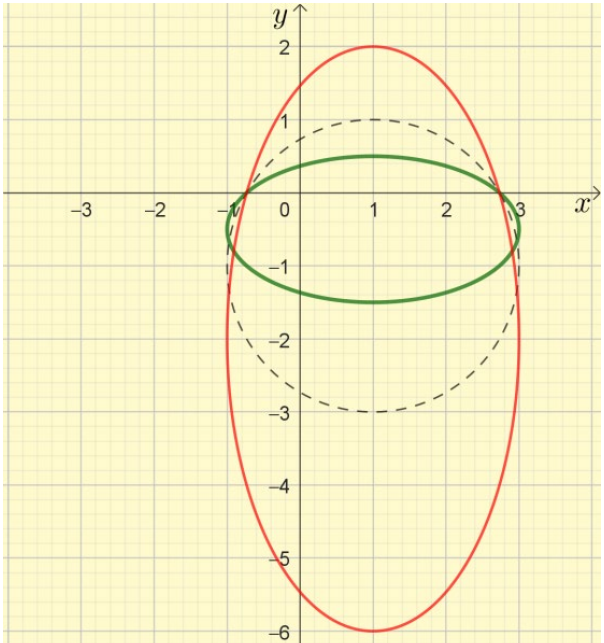
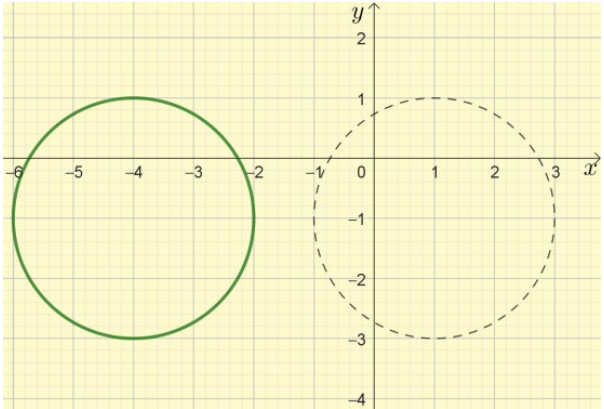
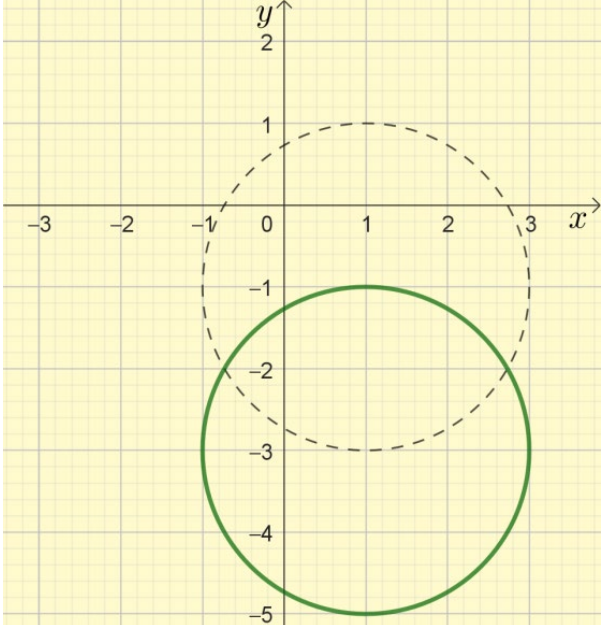
Якщо на координатній площині xOy позначити всі точки, координати кожної з яких є розв'язком рівняння $F(x; y) = 0$, то отриману фігуру називають графіком цього рівняння.

Наприклад, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ — рівняння кола, $ax + by + c = 0$ — рівняння прямої тощо.

Примітка. Будь-яка функція $y = f(x)$, є рівнянням $y - f(x) = 0$.

Нагадаємо правила, які допомагають використовувати геометричні перетворення для побудови графіків рівнянь.

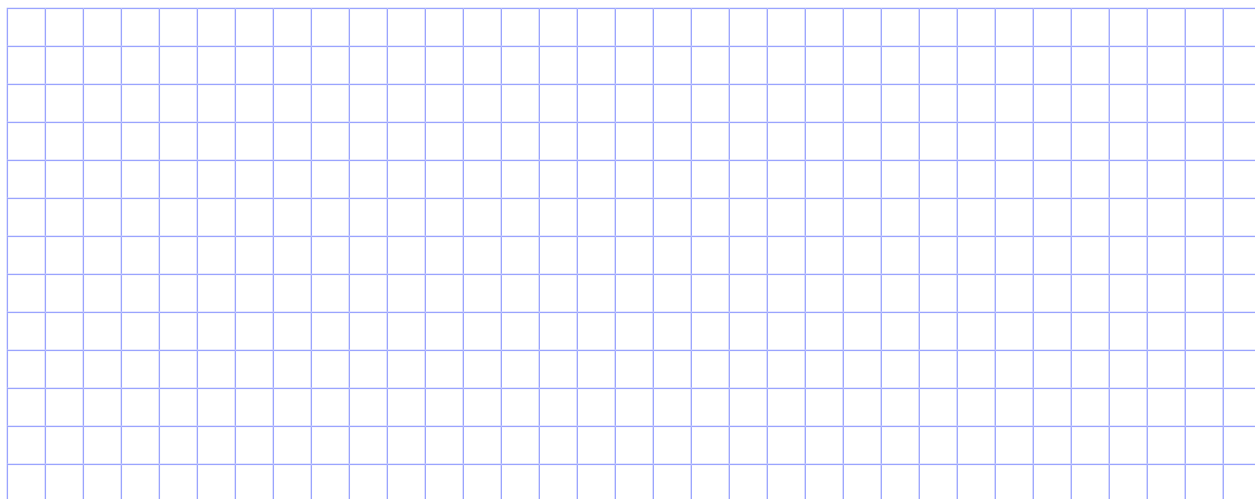
№	Правило	Рисунок
1.	Графік рівняння $F(-x; y) = 0$ можна отримати в результаті симетрії відносно осі ординат графіка рівняння $F(x; y) = 0$.	
2.	Графік рівняння $F(x; -y) = 0$ можна отримати в результаті симетрії відносно осі абсцис графіка рівняння $F(x; y) = 0$.	
3.	Графік рівняння $F(kx; y) = 0$, де $k > 0$, можна отримати в результаті стискання графіка рівняння $F(x; y) = 0$ у k разів до осі ординат, якщо $k > 1$ або в результаті розтягнення графіка рівняння $F(x; y) = 0$ у $\frac{1}{k}$ рази від осі ординат, якщо $0 < k < 1$.	

№	Правило	Рисунок
4.	Графік рівняння $F(x; ky) = 0$, де $k > 0$, можна отримати в результаті стискання графіка рівняння $F(x; y) = 0$ у k разів до осі абсцис, якщо $k > 1$ або в результаті розтягнення графіка рівняння $F(x; y) = 0$ у $\frac{1}{k}$ рази від осі абсцис, якщо $0 < k < 1$.	
5.	Графік рівняння $F(x + a; y) = 0$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка рівняння $F(x; y) = 0$ уздовж осі абсцис на a одиниць ліворуч, якщо $a > 0$ і на $-a$ одиниць праворуч, якщо $a < 0$.	
6.	Графік рівняння $F(x; y + b) = 0$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка рівняння $F(x; y) = 0$ уздовж осі ординат на b одиниць униз, якщо $b > 0$ і на $-b$ одиниць угору, якщо $b < 0$.	

№	Правило	Рисунок
7.	Графік рівняння $F(x ; y) = 0$ можна отримати з графіка рівняння $F(x; y) = 0$ таким чином: • побудувати фігуру M_1, яка є графіком рівняння $F(x; y) = 0$ при $x \geq 0$; • побудувати фігуру M_2, симетричну фігурі M_1 відносно осі ординат. Фігура $M_1 \cup M_2$ є шуканим графіком.	
8.	Графік рівняння $F(x; y) = 0$ можна отримати з графіка рівняння $F(x; y) = 0$ таким чином: • побудувати фігуру M_1, яка є графіком рівняння $F(x; y) = 0$ при $y \geq 0$; • побудувати фігуру M_2, симетричну фігурі M_1 відносно осі абсцис. Фігура $M_1 \cup M_2$ є шуканим графіком.	

Примітка. Не кожний графік рівняння можна побудувати, за допомогою геометричних перетворень.

Приклад 5. Побудуйте графік рівняння $|y + 1| = \sin x$.



VII. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Антена датчика ловить радіосигнал, який перетворюється в електричний сигнал, що змінюється за законом $U = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$, де t — час в секундах, амплітуда $U_0 = 2$ В, частота $\omega = \frac{2\pi}{3}$ рад/с, фаза $\varphi = -\frac{\pi}{6}$. Датчик налаштований так, що у випадку, якщо напруга на ньому не нижче одного вольт, то блимає індикатор. Яку частину часу (у відсотках) упродовж першої секунди після початку роботи буде блимати індикатор?

Задача 2. Олімпіадна задача. Побудуйте всі точки, координати яких $(x; y)$ задовольняють рівняння $\sin(x + y) = 0$.

VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$; 2) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 3) $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; 4) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

2. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sin x - 1$; 2) $y = \cos x + 2$; 3) $y = \operatorname{ctg} x - \frac{1}{2}$; 4) $y = \operatorname{tg} x + 1,5$.

3. Укажіть амплітуду та циклічну частоту гармонічного коливання:

1) $y = 0,6 \cos(2\pi x - 3)$; 2) $y = 8 \sin\left(7x + \frac{\pi}{12}\right)$.

4. Побудуйте графік функції та дослідіть її основні властивості:

1) $y = -\sin(x + 1)$; 2) $y = -\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

5. Побудуйте графік функції та дослідіть її основні властивості:

1) $y = 1 + \sin x$; 2) $y = 1 + \cos x$; 3) $y = 1 + \operatorname{tg} x$; 4) $y = 1 + \operatorname{ctg} x$.

6. Побудуйте графік рівняння:

1) $|y| = \sin x + 1$; 2) $|y| = \cos x - 1$; 3) $|y + 2| = \operatorname{tg} x$; 4) $|y| + 1 = |\operatorname{ctg} x|$.

Рівень В

1. Побудуйте графік функції:

1) $y = \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; 3) $y = \operatorname{tg} 3x - 2$;

4) $y = \operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$; 5) $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; 6) $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{3} + 1$.

2. Побудуйте графік функції:

$$\begin{array}{lll}
 1) y = 1 + \cos \frac{x}{2}; & 2) y = 3 \cos \frac{x}{2}; & 3) y = \frac{1}{2} \cos x - 2; \\
 4) y = \cos 3x - 1; & 5) y = \cos 2x; & 6) y = 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right).
 \end{array}$$

3. Укажіть амплітуду та циклічну частоту гармонічного коливання:

$$1) y = -3 \sin \left(-\pi x - \frac{\pi}{3} \right); \quad 2) y = \frac{1}{3} \cos \left(-7x - \frac{2\pi}{3} \right).$$

4. Побудуйте графік функції і вкажіть її множину значень та головний період:

$$1) y = -4 \cos \frac{x}{2}; \quad 2) y = \frac{1}{2} \sin \frac{x}{4}.$$

5. Побудуйте графік функції та знайдіть різницю між найбільшим і найменшим її значеннями:

$$1) y = 0,5 \cos \left(t + \frac{\pi}{6} \right); \quad 2) y = 3 \sin \left(2t + \frac{\pi}{6} \right).$$

6. Побудуйте графік функції $y = \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$. Укажіть:

- 1) нулі функції;
- 2) проміжки, на яких функція набуває додатних значень, і на яких — від'ємних;
- 3) проміжки зростання й спадання функції.

7. Побудуйте графік і визначте основні властивості функцій:

$$\begin{array}{ll}
 1) f(x) = \sin \frac{x}{2}; & 2) f(x) = 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right); \\
 3) f(x) = \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right); & 4) f(x) = 1 - \cos 3x.
 \end{array}$$

8. Укажіть кількість коренів рівняння $2 \cos \frac{x}{2} = a$ залежно від значень параметра a на проміжку $[0; 2\pi]$.

9. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \begin{cases} \sin x, & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x, & \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}; \end{cases} \quad 2) y = \begin{cases} \cos x, & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{ctg} x, & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi. \end{cases}$$

10. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \operatorname{tg} \left(3x - \frac{\pi}{4} \right); \quad 2) y = \operatorname{ctg} \left(3 \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \right).$$

11. Побудуйте графік рівняння:

$$\begin{array}{ll}
 1) |y| - 1 = 2 \operatorname{tg} 4|x|; & 2) |y - 1| = 3 \operatorname{tg} \left(|x| - \frac{\pi}{3} \right); \\
 3) \left| y + \frac{1}{2} \right| = \frac{3}{2} \operatorname{tg} (3|x| - 1); & 4) |y| + \frac{1}{2} = 2 \operatorname{ctg} (|x| - 2).
 \end{array}$$

12. Побудуйте графік рівняння:

$$1) \sin \pi (x^2 + y^2) = 1; \quad 2) \sin x + \sin y = -2.$$

Рівень С

1. Побудуйте графік і визначте основні властивості функції:

$$1) y = \frac{3}{2} \sin\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}; \quad 2) y = 2 \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - 3;$$

$$3) y = 3 \operatorname{ctg} 4x - \frac{1}{3}; \quad 4) y = -2 \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1.$$

2. Побудуйте графік функції та опишіть її основні властивості:

$$1) y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right); \quad 2) y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}; \quad 3) y = \operatorname{tg} x - 2;$$

$$4) y = \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right); \quad 5) y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x; \quad 6) y = \operatorname{ctg} x + 1.$$

3. Побудуйте графік функції та опишіть її основні властивості:

$$1) y = 1 + \cos x; \quad 2) y = 3 \cos x; \quad 3) y = \cos x - 2;$$

$$4) y = \cos 3x - 1; \quad 5) y = \cos 2x; \quad 6) y = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$

4. Укажіть амплітуду, циклічну частоту, початкову фазу та фазу гармонічного коливання:

$$1) y = -3 \cos\left(-\pi x + \frac{2\pi}{3}\right); \quad 2) y = -\frac{1}{3} \sin\left(-7x + \frac{\pi}{3}\right).$$

5. Побудуйте графік функції:

$$1) y = -2 \sin\left(2|x| + \frac{\pi}{3}\right) + 2; \quad 2) y = -\frac{1}{2} \cos\left(2|x| + \frac{\pi}{4}\right).$$

6. Побудуйте графік рівняння:

$$1) |y| = \left| 2 \operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) \right|; \quad 2) |y| = 2 \left| \operatorname{ctg}\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \right|;$$

$$3) |y| = 2 \left| \operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \right|; \quad 4) |y| = 0,5 \left| \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \right|.$$

7. Творче завдання. Створіть застосунок, який ілюстрував би побудову графіків функцій та рівнянь, що містять тригонометричні вирази, за допомогою геометричних перетворень.

Рефлексія

1) На уроці я дізнався/дізналася

.....

.....

2) Мені найбільше запам'яталося

.....

.....

- 3) Для мене було найцікавішим

- 4) Для мене було найскладнішим

- 5) Я припустився/припустилася помилки

- 6) Я хочу повторити, аби краще зрозуміти

- 7) Поради собі до наступного уроку

Можливі теми проєктів

1. Перетворення графіків тригонометричних функцій при вивченні хвильових процесів.
2. Створення інтерактивної ілюстрації побудови графіків функцій $y = A\text{tg}(kx + b)$ та $y = A\text{ctg}(kx + b)$ засобами Geogebra чи Desmos.
3. Графічний метод розв'язування тригонометричних рівнянь з параметрами.
4. Застосування перетворень графіків тригонометричних функцій у будівництві та в архітектурі.
5. Моделювання добових температур за допомогою тригонометричних функцій.

