

11

Тема 1.

Повторення властивостей тригонометричних функцій

Урок 4. Побудова графіків тригонометричних функцій та дослідження їхніх властивостей

Тип уроку: урок узагальнення та систематизації знань.

План уроку

1. Побудова графіків тригонометричних функцій виду $y = A\sin(kx + b)$, $y = A\cos(kx + b)$.
2. Побудова графіків тригонометричних функцій виду $y = A\operatorname{tg}(kx + b)$, $y = A\operatorname{ctg}(kx + b)$.
3. Дослідження властивостей функцій за їхніми графіками.
4. Побудова графіків рівнянь.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

виокремлює в конкретній специфічній проблемній ситуації її складові частини, які можуть бути розв'язані математичними методами [12 МАО 1.1.1–2 П];

обирає серед кількох різних стратегій розв'язання специфічних проблемних ситуацій таку, що задовольняє певні умови [12 МАО 2.2.2–1 П];

аналізує спільні та відмінні риси різних моделей і шляхів розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1–1 П];

добирає доцільні математичні поняття, факти і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання можна лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово упродовж викладення матеріалу.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого. Завдання можна розв'язувати усно.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.

- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 6) Обов'язково пропонуйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.
- 7) Обов'язково пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності маркування – на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 8) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Робота над обраним проєктом може тривати упродовж вивчення (повторення) усієї змістової теми. Створення проєктів та їх захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.
- 9) Темати проєктів можуть бути запропоновані вами практичні завдання за рівнями маркування А, В, С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівні В або С. Можливі теми для створення проєктів запропоновані.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Чому різноманітні коливання доцільно описувати за допомогою тригонометричних функцій?
- 2) Чи можна передбачити форму хвилі, якщо задано її рівняння?
- 3) Навіщо вивчати перетворення графіків функцій, коли можна просто будувати функції по точках?
- 4) Чи можна шифрувати повідомлення за допомогою графіків тригонометричних функцій? Що тобі відомо про перетворення Фур'є?
- 5) Чи можна створити графік, який описує твій настрій упродовж тижня за допомогою тригонометричних функцій?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Функція $y = f(x)$ є парною. Знайдіть $f(-4)$, якщо $f(4) = -6$.
Відповідь. -6 .
2. Які з наведених тверджень 1) – 4) правильні?
 - 1) Щоб побудувати графік функції $y = \sqrt{x+2}$, потрібно графік $y = \sqrt{x}$ перенести на дві одиниці вгору по осі Oy .

2) Щоб побудувати графік функції $y = x^2 + 2$, потрібно графік $y = x^2$ перенести на дві одиниці вгору по осі Oy .

3) Щоб побудувати графік функції $y = \sqrt{-x}$, потрібно графік $y = \sqrt{x}$ симетрично відобразити відносно осі Ox .

4) Щоб побудувати графік функції $y = -x^2$, потрібно графік $y = x^2$ симетрично відобразити відносно осі Ox .

Відповідь. 2) і 4).

3. Обчисліть нулі функції $y = \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}$.

Відповідь. Функція нулів не має.

4. Укажіть кількість нулів функції $y = \operatorname{ctg} x$ на проміжку $[-\pi; \pi]$.

Відповідь. Два.

5. Укажіть найменший додатний період функції $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(4x)$. (Пробне ЗНО, 2012 р.).

Відповідь. $\frac{\pi}{4}$.

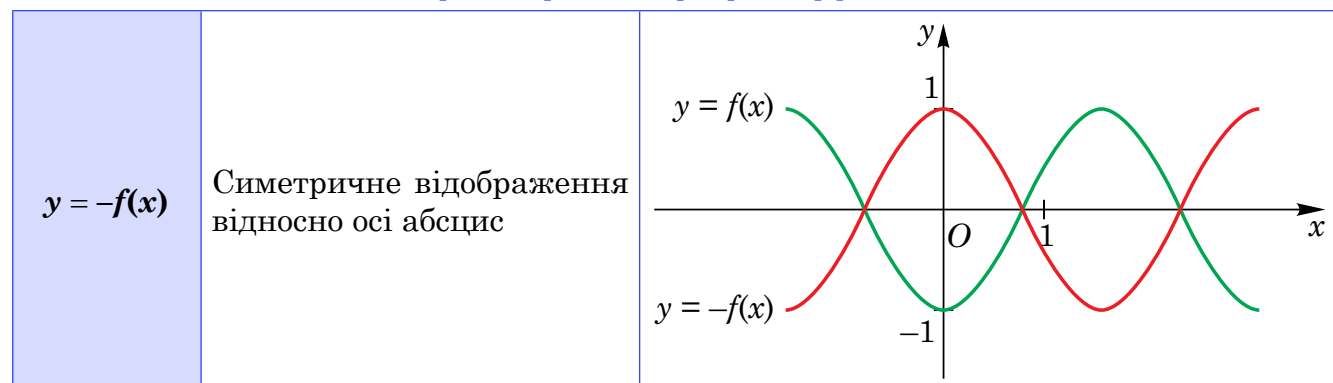
Як я вирішую певну проблему?

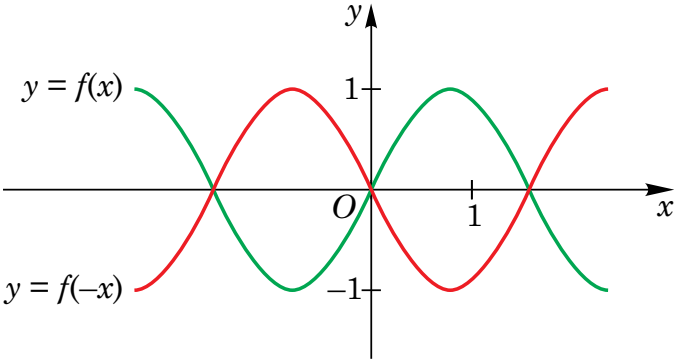
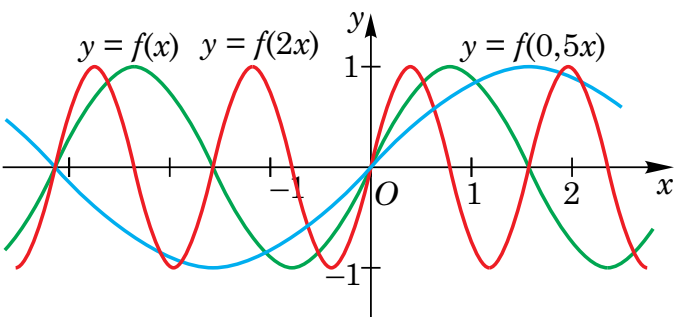
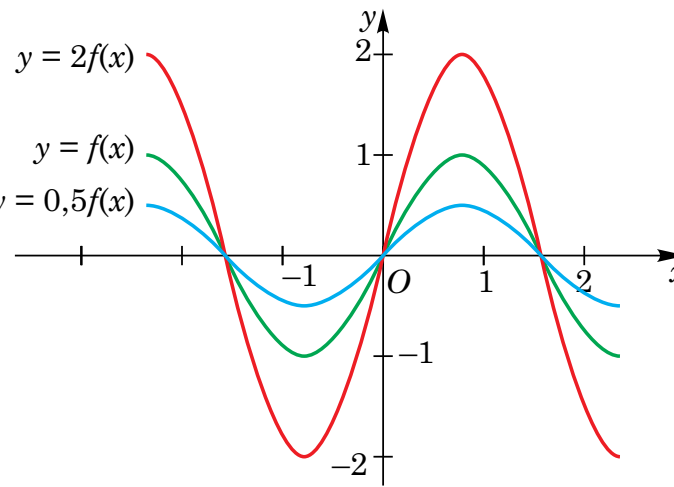
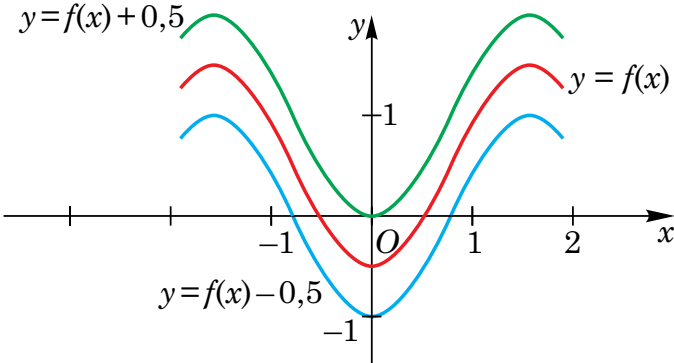
Задача 1. Антена датчика ловить радіосигнал, який перетворюється в електричний сигнал, що змінюється за законом $U = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$, де t — час в секундах, амплітуда $U_0 = 2$ В, частота $\omega = \frac{2\pi}{3}$ рад/с, фаза $\varphi = -\frac{\pi}{6}$. Датчик налаштований так, що у випадку, якщо напруга на ньому не нижче одного вольт, то блимає індикатор. Яку частину часу (у відсотках) упродовж першої секунди після початку роботи буде блимати індикатор?

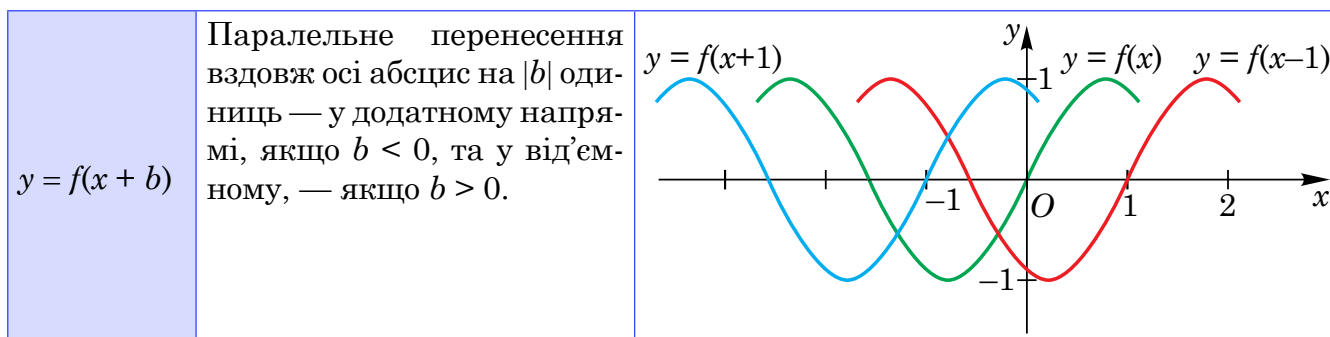
Задача 2. Олімпіадна задача. Побудуйте всі точки, координати яких $(x; y)$ задовольняють рівняння $\sin(x + y) = 0$.

III. Побудова графіків тригонометричних функцій виду $y = A \sin(kx + b)$, $y = A \cos(kx + b)$

Деякі перетворення графіка функції $y = f(x)$



$y = f(-x)$	Симетричне відображення відносно осі ординат	
$y = f(kx), k > 1$	Стиск до осі ординат у k разів, тобто відстань від кожної точки графіка $y = f(x)$ до осі ординат зменшується у k разів.	
$y = f(kx), 0 < k < 1$	Розтяг від осі ординат в $\frac{1}{k}$ разів, тобто відстань від кожної точки графіка $y = f(x)$ до осі ординат збільшується в k разів.	
$y = mf(x), m > 1$	Розтяг від осі абсцис у m разів, тобто відстань від кожної точки графіка $y = f(x)$ до осі абсцис збільшується у m разів.	
$y = mf(x), 0 < m < 1$	Стиск до осі абсцис в $\frac{1}{m}$ разів, тобто відстань від кожної точки графіка $y = f(x)$ до осі абсцис зменшується в $\frac{1}{m}$ разів.	
$y = f(x) + a$	Паралельне перенесення вздовж осі ординат на $ a $ одиниць — у додатному напрямі, якщо $a > 0$, та у від'ємному, — якщо $a < 0$.	



1) Будуємо графіки функцій $y = A \sin x$ і $y = A \cos x$ із графіків $y = \sin x$ і $y = \cos x$ за допомогою перетворень $f(x) \rightarrow mf(x)$ та $f(x) \rightarrow -f(x)$.

2) Будуємо графіки функцій $y = A \sin(x + b)$ і $y = A \cos(x + b)$ із графіків функцій $y = A \sin x$ і $y = A \cos x$ за допомогою перетворень $f(x) \rightarrow f(x + b)$.

3) Будуємо графіки функцій $y = A \sin(kx + b)$ і $y = A \cos(kx + b)$ із графіків $y = A \sin(x + b)$ і $y = A \cos(x + b)$ за допомогою перетворень $f(x) \rightarrow f(kx)$ і $f(x) \rightarrow f(-x)$.

Для наочного пояснення можна скористатися Geogebra-аплетом:

<https://www.geogebra.org/m/keh4v9ug>



Гармонічні коливання

Формули $y = A \cos(\omega t + \varphi)$ і $y = A \sin(\omega t + \varphi)$ визначають змінну y як функції часу t . Ці формули визначають гармонічні коливання. У формулах: y — значення функції, t — аргумент функції, числа A , ω і φ — константи, такі, що A — амплітуда коливання, φ — початкова фаза, ω — кутова швидкість (циклічна частота), $\omega t + \varphi$ — фаза коливання.

Амплітуда визначається в лінійних одиницях довжини, фаза і початкова фаза — у радіанах.

Якщо $\omega > 0$, то $\omega T = 2\pi$, звідси $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Період гармонічного коливання визначається в секундах. Він обернено пропорційний кутовій швидкості відповідного обертання і не залежить ні від амплітуди, ні від початкової фази коливання.

Ілюстративні приклади

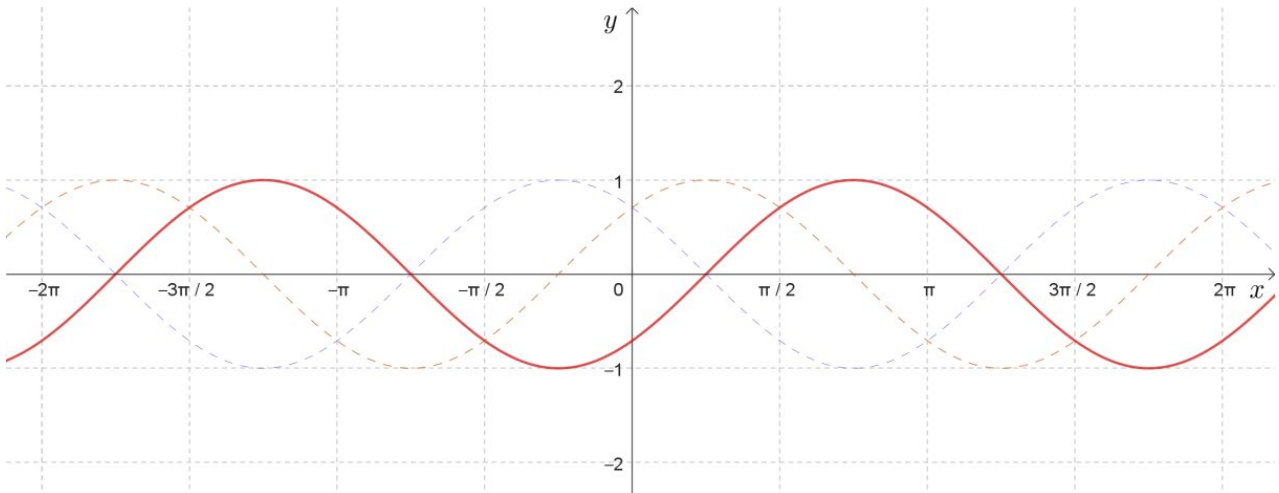
6. Побудуйте графік функції $y = -\sin\left(-x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Розв'язання. 1) Виконаємо паралельне перенесення графіка функції $y = \sin x$ уздовж осі Ox на $\frac{\pi}{4}$ одиниці у від'ємному напрямку, отримаємо графік функції

$$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

2) Відобразимо симетрично графік функції $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ відносно осі ординат, отримаємо графік функції $y = \sin\left(-x + \frac{\pi}{4}\right)$.

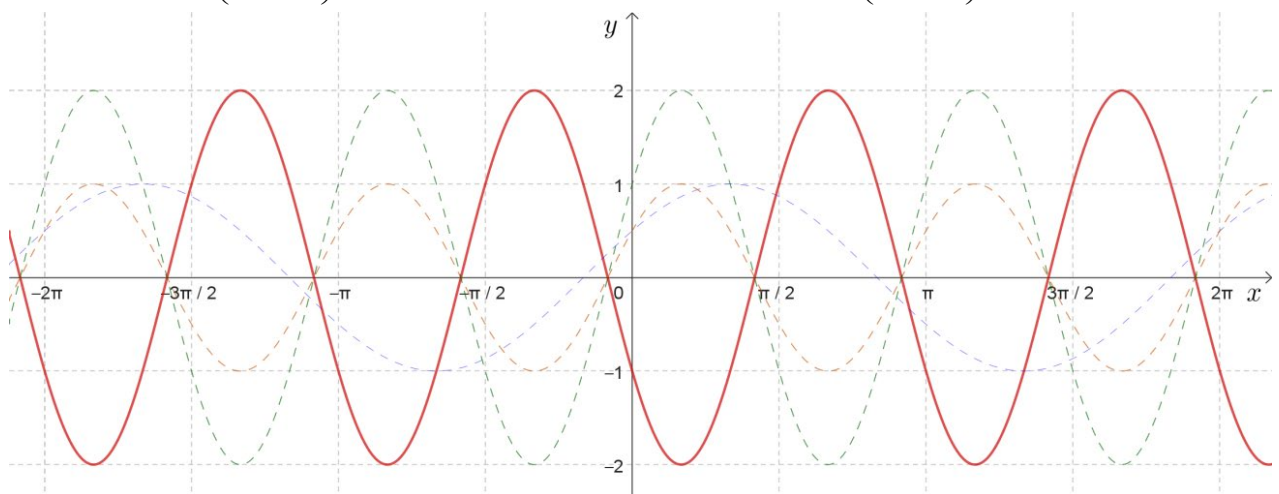
3) Відобразимо симетрично графік функції $y = \sin\left(-x + \frac{\pi}{4}\right)$ відносно осі абсцис, отримаємо графік функції $y = -\sin\left(-x + \frac{\pi}{4}\right)$ (див. рисунок).



7. Побудуйте графік функції $y = -2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Розв'язання. Послідовність побудови графіка з використанням геометричних перетворень:

- | | |
|--|---|
| 1) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right);$ | 2) $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right);$ |
| 3) $y = -\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right);$ | 4) $y = -2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$ |



8. Укажіть амплітуду, початкову фазу, циклічну частоту та період гармонічного коливання, що задане функцією $y = 7\cos\left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

Розв'язання. Оскільки функція $y = \cos x$ — парна, то $y = 7 \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

Амплітуда коливання: 7.

Початкова фаза: $-\frac{\pi}{4}$.

Циклічна частота $\frac{1}{2}$.

Період: $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

Відповідь. 7; $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{1}{2}$; 4π .

IV. Побудова графіків тригонометричних функцій виду $y = A \operatorname{tg}(kx + b)$, $y = A \operatorname{ctg}(kx + b)$

1) Будуємо графіки функцій $y = A \operatorname{tg} x$ та $y = A \operatorname{ctg} x$ із застосуванням графіків функцій $y = \operatorname{tg} x$ та $y = \operatorname{ctg} x$, за перетвореннями $f(x) \rightarrow kf(x)$ та $f(x) \rightarrow -f(x)$.

2) Будуємо графіки функцій $y = A \operatorname{tg}(x + b)$ та $y = A \operatorname{ctg}(x + b)$ із застосуванням графіків функцій $y = A \operatorname{tg} x$ та $y = A \operatorname{ctg} x$, за перетвореннями $f(x) \rightarrow f(x + b)$.

3) Будуємо графіки функцій $y = A \operatorname{tg}(kx + b)$ та $y = A \operatorname{ctg}(kx + b)$ із застосуванням графіків функцій $y = A \operatorname{tg}(x + b)$ та $y = A \operatorname{ctg}(x + b)$, за перетвореннями $f(x) \rightarrow f(kx)$ та $f(x) \rightarrow f(-x)$.

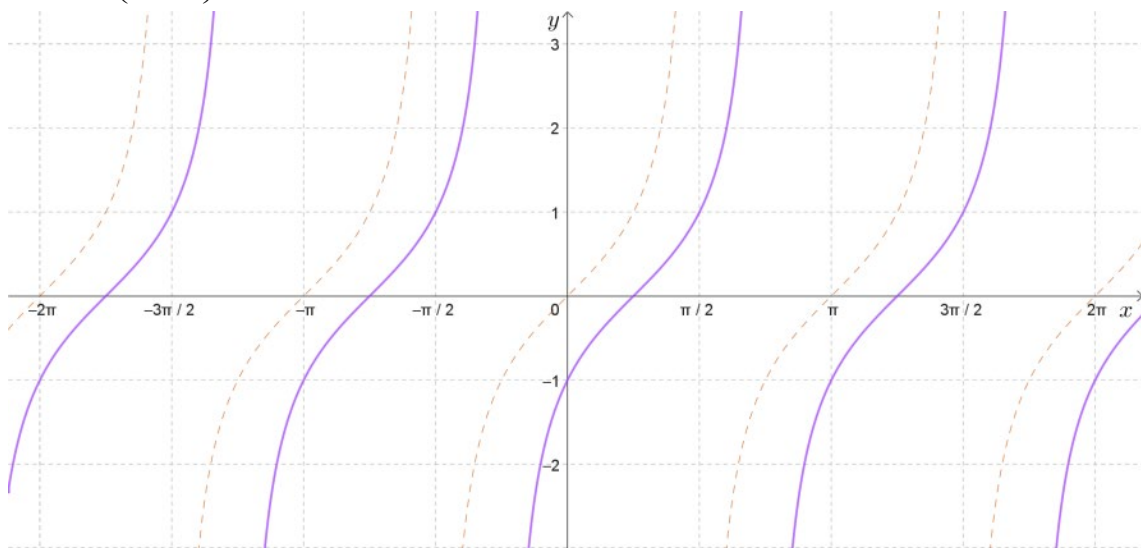
Ілюстративний приклад

9. Побудуйте графік функції $y = -2 \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

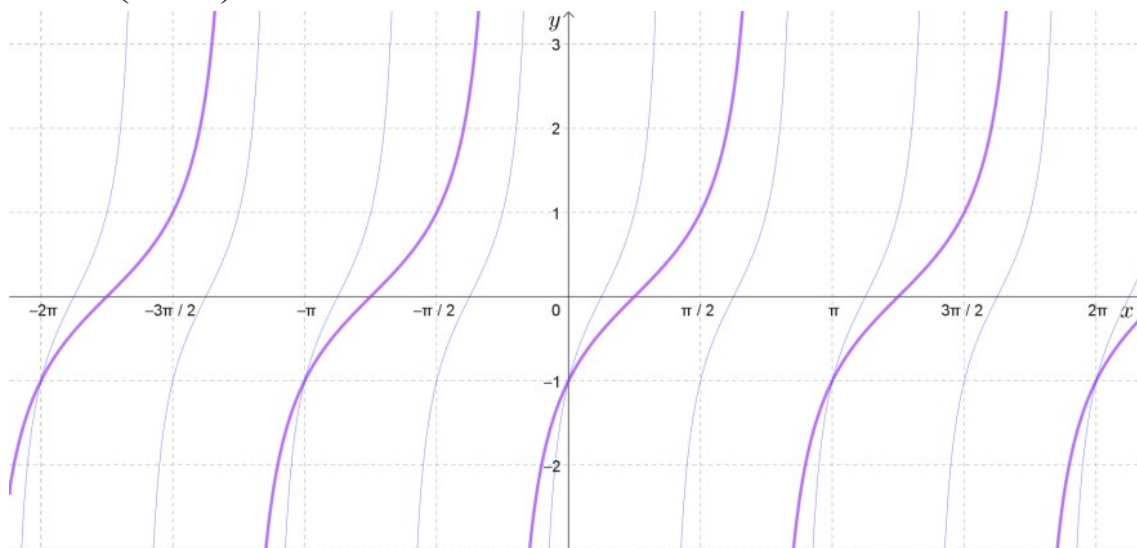
Розв'язання. Наведемо послідовність побудови графіка з використанням геометричних перетворень:

1) $y = \operatorname{tg} x$;

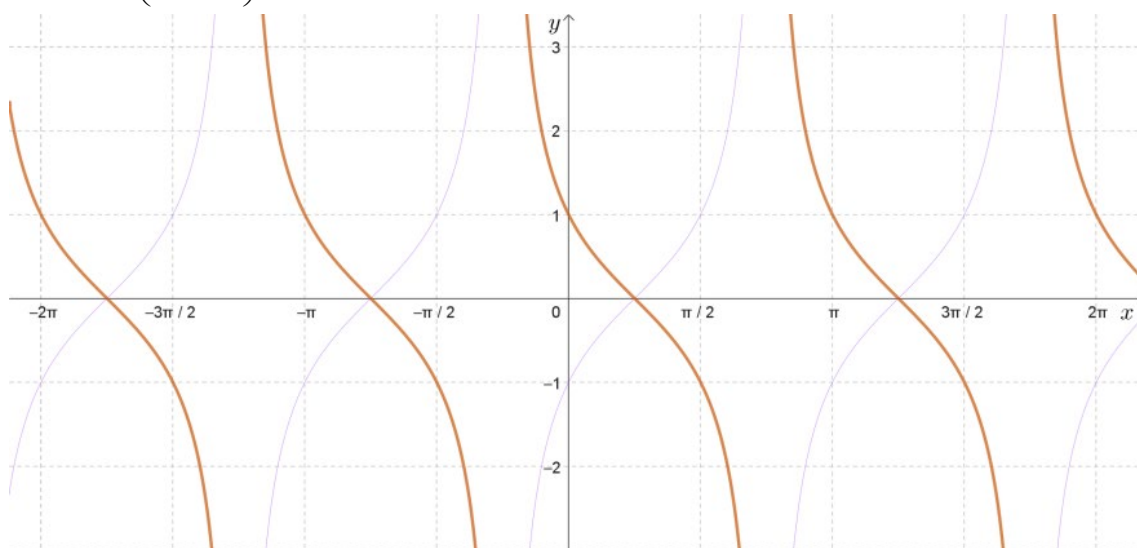
2) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.



$$3) y = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$$



$$4) y = -\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$$



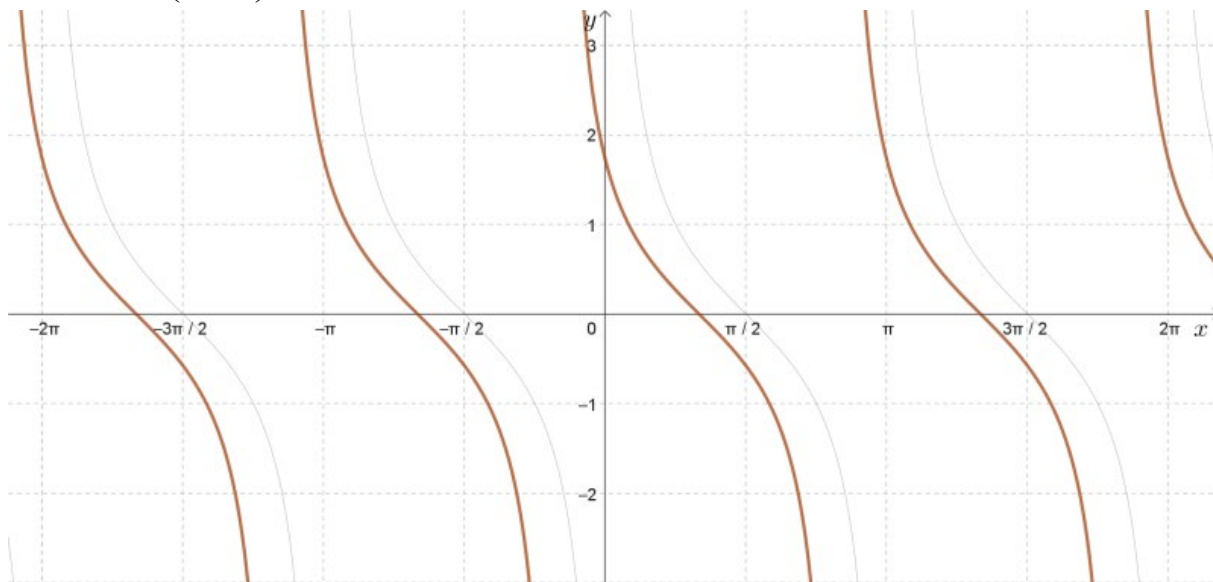
$$5) y = -2\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$$



10. Побудуйте графік функції $y = \frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$.

Розв'язання. Наведемо послідовність побудови графіка з використанням геометричних перетворень: 1) $y = \operatorname{ctg} x$;

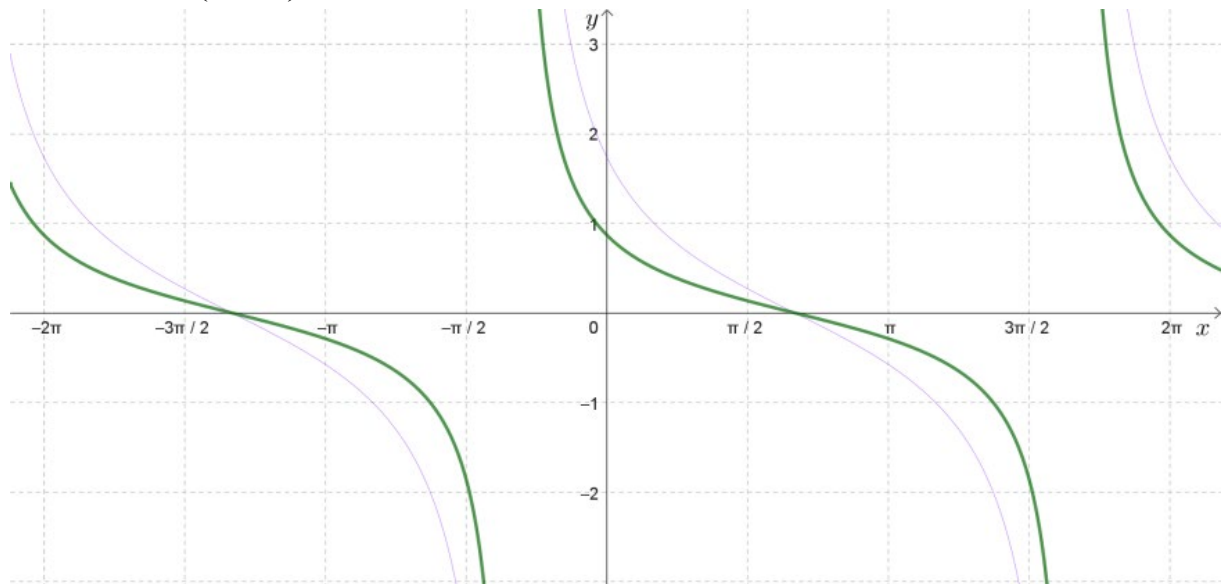
2) $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.



3) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$.



$$4) y = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \right).$$



V. Дослідження властивостей функцій за їхніми графіками

Орієнтовна послідовність дій для дослідження властивостей функцій за їхніми графіками.

1. Знайдіть область визначення функції.
2. Знайдіть множину значень функції.
3. Дослідіть функцію на парність.
4. Дослідіть функцію на періодичність.
5. Знайдіть нулі функції.
6. Укажіть проміжки знакосталості функції.
7. Укажіть проміжки монотонності функції.

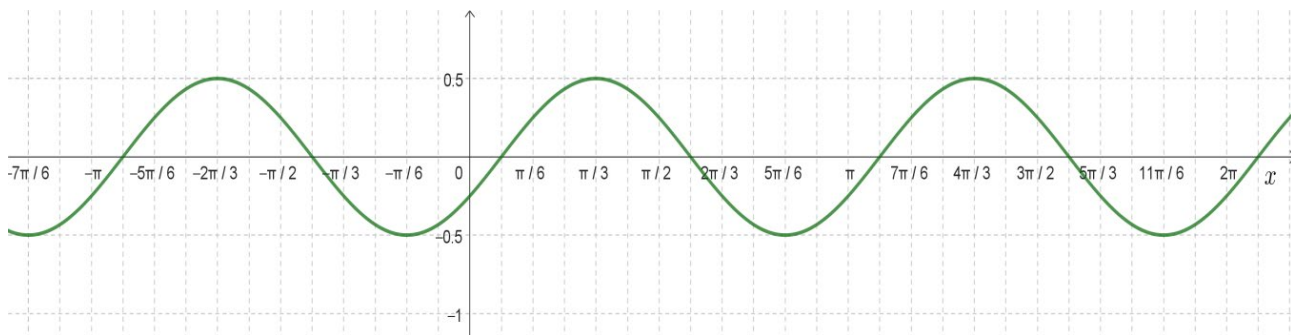
Примітка. Якщо деякі пункти викликають труднощі, то їх можна пропустити. Наприклад, коли потрібно розв'язувати складне тригонометричне рівняння чи нерівність.

Ілюстративний приклад

- 11.** Побудуйте графік функції $y = \frac{1}{2} \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right)$ та опишіть її основні властивості.

Розв'язання. Наведемо послідовність побудови графіка з використанням геометричних перетворень:

$$1) y = \sin x; \quad 2) y = \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right); \quad 3) y = \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right); \quad 4) y = \frac{1}{2} \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right).$$



1) Областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел.

2) Множиною значень є проміжок $[-0,5; 0,5]$.

3) Функція ні парна, ні непарна.

4) Функція періодична з головним періодом π .

5) Нулі функції — числа виду $x = \frac{\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

6) Функція додатна на кожному з проміжків виду $\left(\frac{\pi}{12} + \pi n; \frac{7\pi}{12} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.

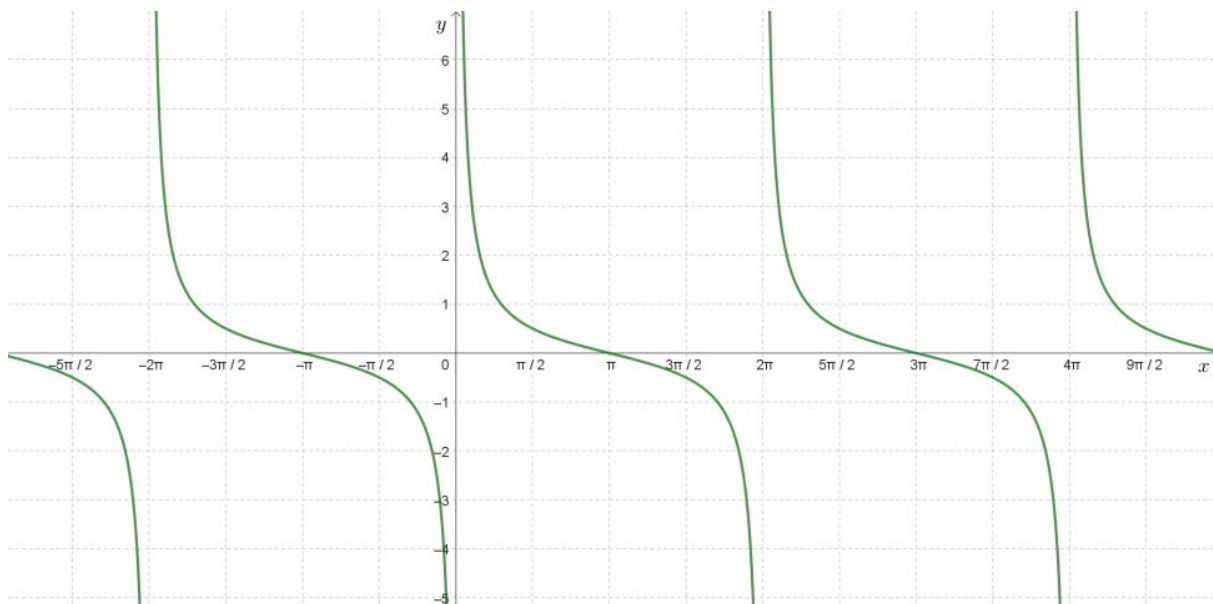
Функція від'ємна на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{5\pi}{12} + \pi n; \frac{\pi}{12} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.

7) Функція зростає на кожному з проміжків виду $\left[-\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n\right], n \in \mathbb{Z}$, і спадає

на кожному з проміжків виду $\left[\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{5\pi}{6} + \pi n\right], n \in \mathbb{Z}$.

12. Побудуйте графік функції $y = 2 \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ та опишіть її основні властивості.

Розв'язання. Наведемо послідовність побудови графіка з використанням геометричних перетворень: 1) $y = \operatorname{ctg} x$; 2) $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$; 3) $y = 2 \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$.



1) Областю визначення функції є множина усіх дійсних чисел, крім чисел виду $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

- 2) Множиною значень є множина усіх дійсних чисел.
- 3) Функція непарна.
- 4) Функція періодична з головним періодом 2π .
- 5) Нулі функції числа виду $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
- 6) Функція додатна на проміжках $(2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.
- Функція від'ємна на проміжках $(\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.
- 7) Функція спадає на кожному з проміжків $(2\pi n; 2\pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

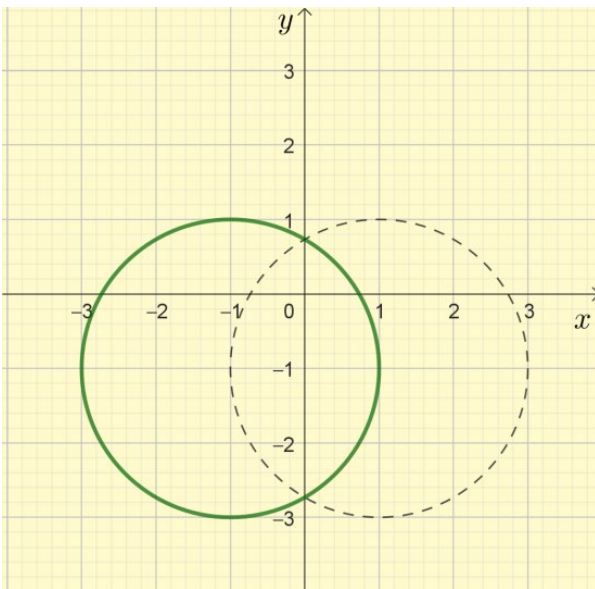
VI. Побудова графіків рівнянь

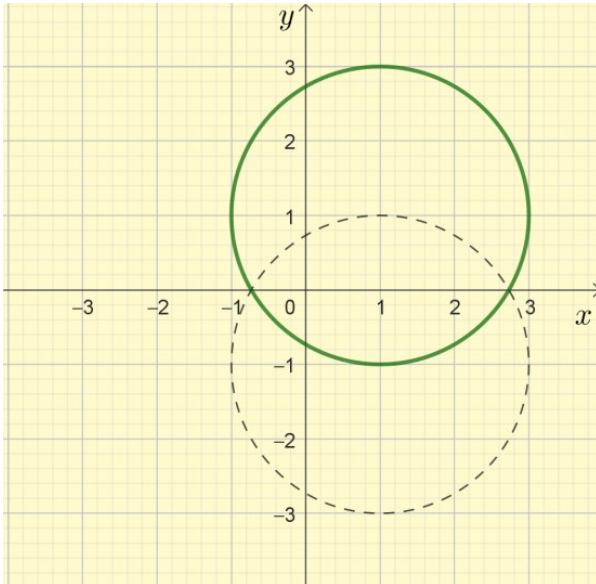
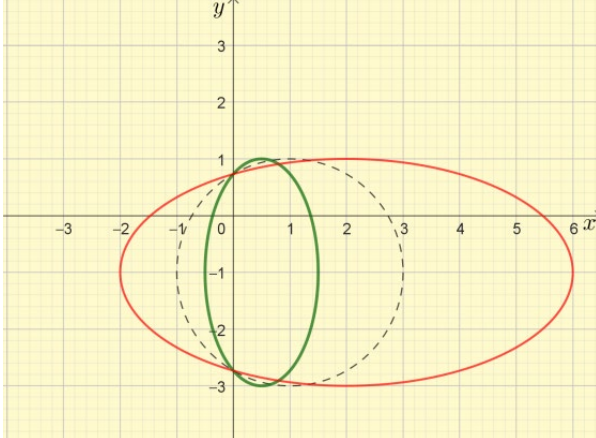
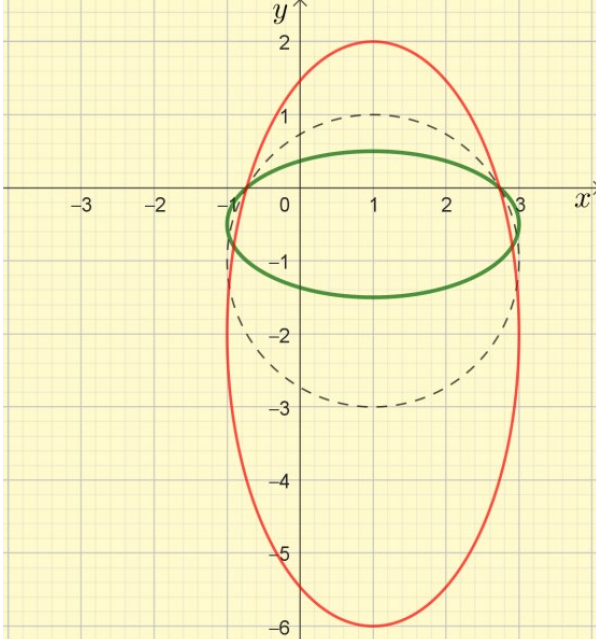
Якщо на координатній площині xOy позначити всі точки, координати кожної з яких є розв'язком рівняння $F(x; y) = 0$, то отриману фігуру називають графіком цього рівняння.

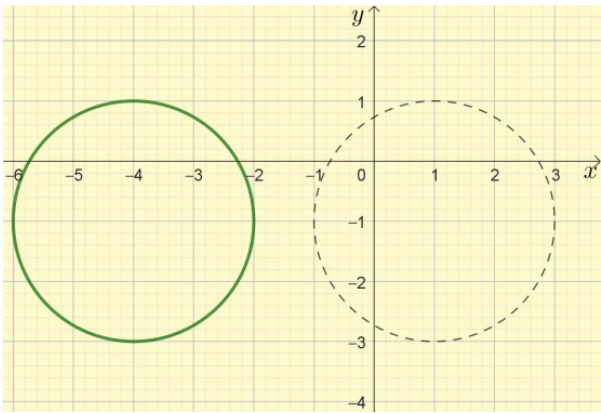
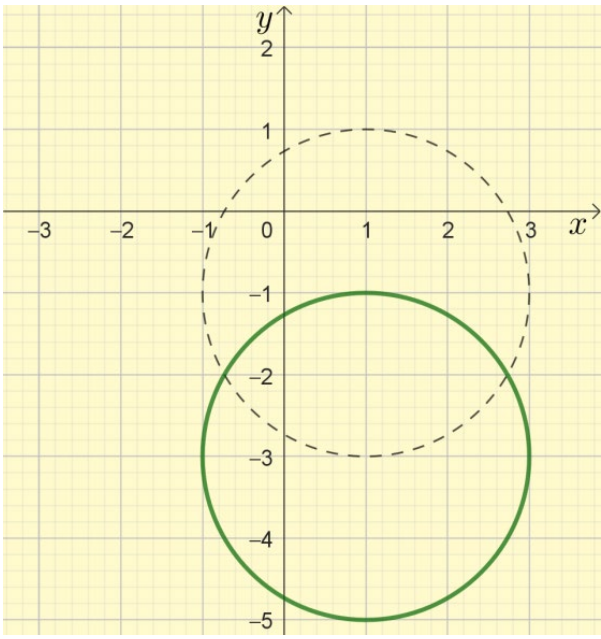
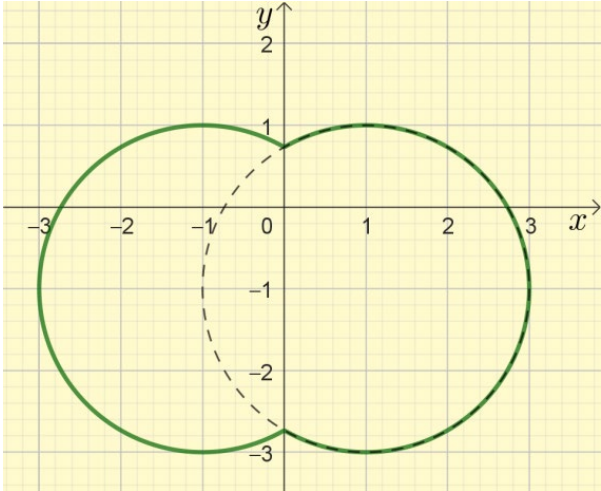
Наприклад, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ — рівняння кола, $ax + by + c = 0$ — рівняння прямої тощо.

Примітка. Будь-яка функція $y = f(x)$, є рівнянням $y - f(x) = 0$.

Нагадаємо правила, які допомагають використовувати геометричні перетворення для побудови графіків рівнянь.

№	Правило	Рисунок
1.	Графік рівняння $F(-x; y) = 0$ можна отримати в результаті симетрії відносно осі ординат графіка рівняння $F(x; y) = 0$.	

№	Правило	Рисунок
2.	Графік рівняння $F(x; -y) = 0$ можна отримати в результаті симетрії відносно осі абсцис графіка рівняння $F(x; y) = 0$.	
3.	Графік рівняння $F(kx; y) = 0$, де $k > 0$, можна отримати в результаті стискання графіка рівняння $F(x; y) = 0$ у k разів до осі ординат, якщо $k > 1$ або в результаті розтягнення графіка рівняння $F(x; y) = 0$ у $\frac{1}{k}$ рази від осі ординат, якщо $0 < k < 1$.	
4.	Графік рівняння $F(x; ky) = 0$, де $k > 0$, можна отримати в результаті стискання графіка рівняння $F(x; y) = 0$ у k разів до осі абсцис, якщо $k > 1$ або в результаті розтягнення графіка рівняння $F(x; y) = 0$ у $\frac{1}{k}$ рази від осі абсцис, якщо $0 < k < 1$.	

№	Правило	Рисунок
5.	Графік рівняння $F(x + a; y) = 0$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка рівняння $F(x; y) = 0$ уздовж осі абсцис на a одиниць ліворуч, якщо $a > 0$ і на $-a$ одиниць праворуч, якщо $a < 0$.	
6.	Графік рівняння $F(x; y + b) = 0$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка рівняння $F(x; y) = 0$ уздовж осі ординат на b одиниць униз, якщо $b > 0$ і на $-b$ одиниць угору, якщо $b < 0$.	
7.	Графік рівняння $F(x ; y) = 0$ можна отримати з графіка рівняння $F(x; y) = 0$ таким чином: • побудувати фігуру M_1, яка є графіком рівняння $F(x; y) = 0$ при $x \geq 0$; • побудувати фігуру M_2, симетричну фігурі M_1 відносно осі ординат. Фігура $M_1 \cup M_2$ є шуканим графіком.	

№	Правило	Рисунок
8.	Графік рівняння $F(x; y) = 0$ можна отримати з графіка рівняння $F(x; y) = 0$ таким чином: • побудувати фігуру M_1, яка є графіком рівняння $F(x; y) = 0$ при $y \geq 0$; • побудувати фігуру M_2, симетричну фігурі M_1 відносно осі абсцис. Фігура $M_1 \cup M_2$ є шуканим графіком.	

Примітка. Не кожний графік рівняння можна побудувати, за допомогою геометричних перетворень.

Ілюстративні приклади

13. Побудуйте графік рівняння $|y + 1| = \sin x$.

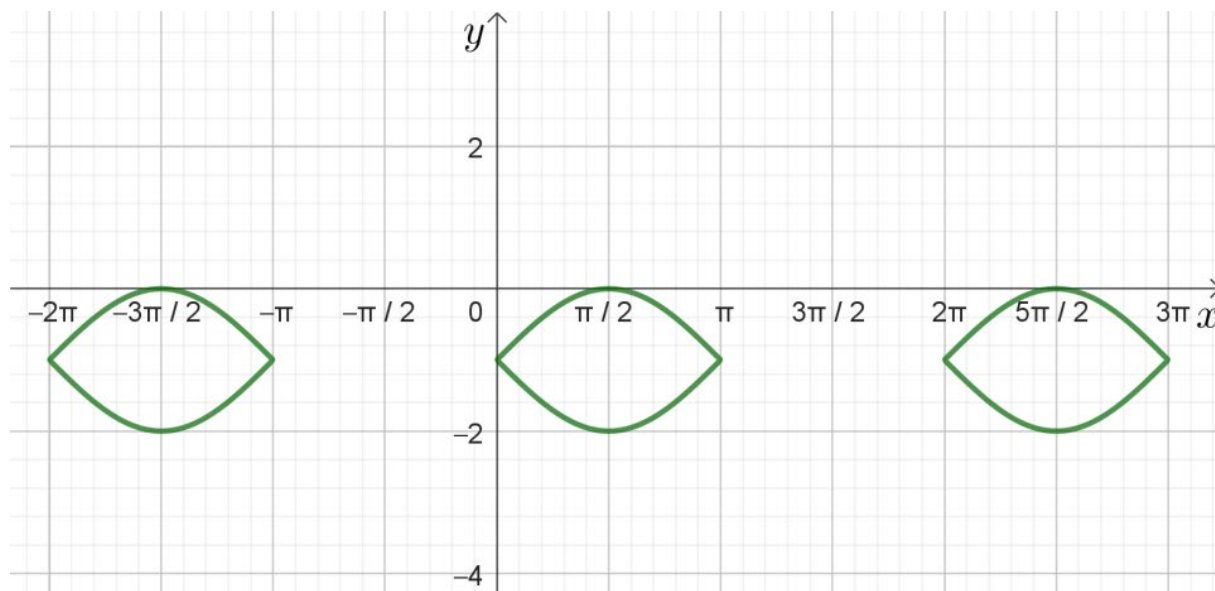
Розв'язання. 1) Будуємо графік функції $y = \sin x$.

2) Будуємо графік рівняння $|y| = \sin x$ за допомогою перетворення

$$F(x; y) = 0 \rightarrow F(x; |y|) = 0.$$

3) Будуємо графік рівняння $|y + 1| = \sin x$ за допомогою перетворення

$$F(x; y) = 0 \rightarrow F(x; y + b) = 0.$$

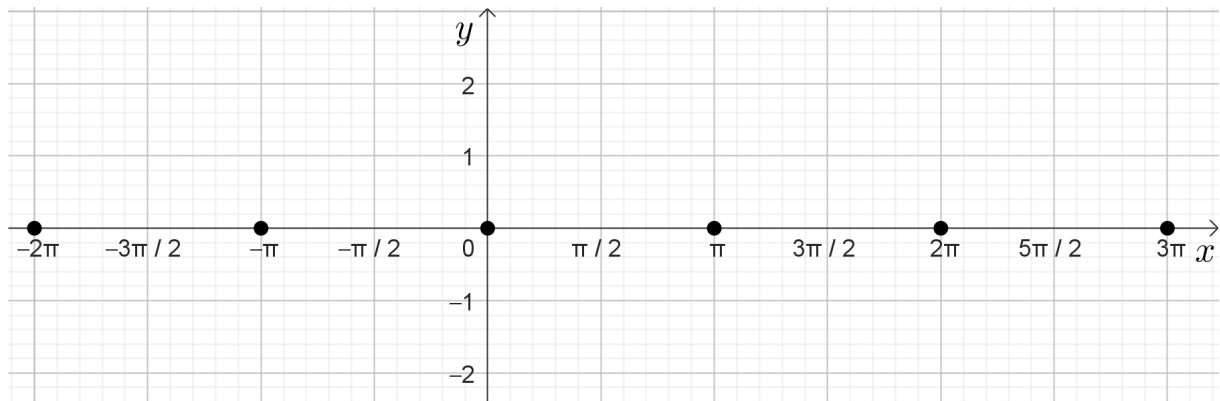


14. Побудуйте графік рівняння $y^2 + \operatorname{tg}^2 x = 0$.

Розв'язання. Сума двох невід'ємних виразів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли кожен із них дорівнює нулю, тобто дане рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} y = 0, \\ \operatorname{tg} x = 0; \end{cases} \begin{cases} y = 0, \\ x = \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Побудуємо усі точки, що задовольняють отриманій системі (див. рисунок).



VII. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (7–8 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Антена датчика ловить радіосигнал, який перетворюється в електричний сигнал, що змінюється за законом $U = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$, де t — час в секундах, амплітуда $U_0 = 2$ В, частота $\omega = \frac{2\pi}{3}$ рад/с, фаза $\varphi = -\frac{\pi}{6}$. Датчик налаштований так, що у випадку, якщо напруга на ньому не нижче одного вольт, то блимає індикатор. Яку частину часу (у відсотках) упродовж першої секунди після початку роботи буде блимати індикатор?

Розв'язання. 1) Закон зміни напруги:

$$U = 2 \sin\left(\frac{2\pi}{3}t - \frac{\pi}{6}\right).$$

Оскільки $U \geq 1$, то $2 \sin\left(\frac{2\pi}{3}t - \frac{\pi}{6}\right) \geq 1$,

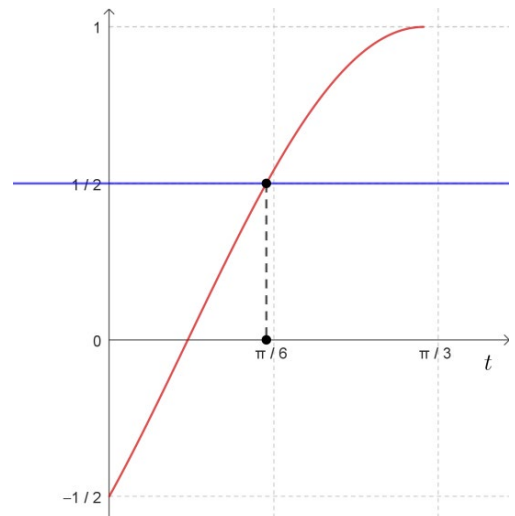
$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}t - \frac{\pi}{6}\right) \geq \frac{1}{2}.$$

2) Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \sin\left(\frac{2\pi}{3}t - \frac{\pi}{6}\right)$, якщо $0 \leq t \leq 1$, і

$$y = \frac{1}{2}.$$

3) Найменше значення кута, що задовольнятиме нерівність $\sin\left(\frac{2\pi}{3}t - \frac{\pi}{6}\right) \geq \frac{1}{2}$,

дорівнює $\frac{\pi}{6}$ (див. графік). Справді, $\sin\left(\frac{2\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

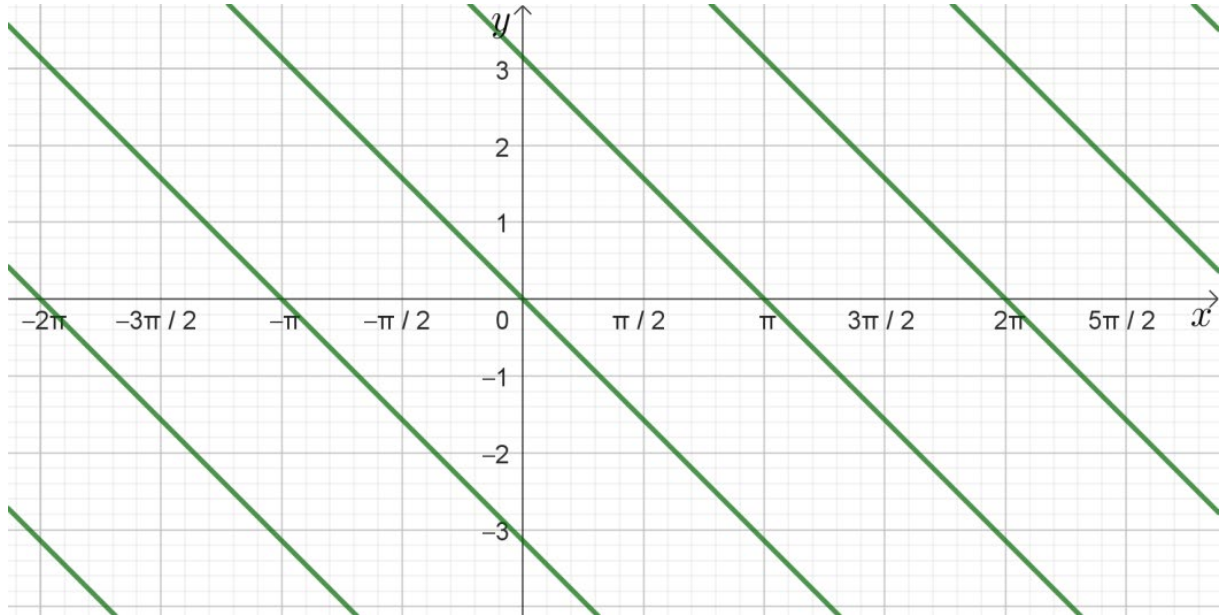


Отже, індикатор блиматиме $\frac{1}{2}$ секунди, що становить 50% упродовж першої секунди після початку роботи.
Відповідь. 50 %.

Задача 2. Олімпіадна задача. Побудуйте всі точки, координати яких $(x; y)$ задовольняють рівняння $\sin(x + y) = 0$.

Розв'язання. $\sin(x + y) = 0$, $x + y = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $y = -x + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Графік побудовано на рисунку.



VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$; 2) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 3) $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; 4) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

2. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sin x - 1$; 2) $y = \cos x + 2$; 3) $y = \operatorname{ctg} x - \frac{1}{2}$; 4) $y = \operatorname{tg} x + 1,5$.

3. Укажіть амплітуду та циклічну частоту гармонічного коливання:

1) $y = 0,6 \cos(2\pi x - 3)$; 2) $y = 8 \sin\left(7x + \frac{\pi}{12}\right)$.

4. Побудуйте графік функції та дослідіть її основні властивості:

1) $y = -\sin(x + 1)$; 2) $y = -\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

5. Побудуйте графік функції та дослідіть її основні властивості:

1) $y = 1 + \sin x$; 2) $y = 1 + \cos x$; 3) $y = 1 + \operatorname{tg} x$; 4) $y = 1 + \operatorname{ctg} x$.

6. Побудуйте графік рівняння:

1) $|y| = \sin x + 1$; 2) $|y| = \cos x - 1$; 3) $|y + 2| = \operatorname{tg} x$; 4) $|y| + 1 = |\operatorname{ctg} x|$.

Рівень В

1. Побудуйте графік функції:

1) $y = \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; 3) $y = \operatorname{tg} 3x - 2$;
4) $y = \operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$; 5) $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; 6) $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{3} + 1$.

2. Побудуйте графік функції:

1) $y = 1 + \cos \frac{x}{2}$; 2) $y = 3 \cos \frac{x}{2}$; 3) $y = \frac{1}{2} \cos x - 2$;
4) $y = \cos 3x - 1$; 5) $y = \cos 2x$; 6) $y = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

3. Укажіть амплітуду та циклічну частоту гармонічного коливання:

1) $y = -3 \sin\left(-\pi x - \frac{\pi}{3}\right)$; 2) $y = \frac{1}{3} \cos\left(-7x - \frac{2\pi}{3}\right)$.

4. Побудуйте графік функції і вкажіть її множину значень та головний період:

1) $y = -4 \cos \frac{x}{2}$; 2) $y = \frac{1}{2} \sin \frac{x}{4}$.

5. Побудуйте графік функції та знайдіть різницю між найбільшим і найменшим її значеннями:

1) $y = 0,5 \cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right)$; 2) $y = 3 \sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$.

6. Побудуйте графік функції $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Укажіть:

- 1) нулі функції;
- 2) проміжки, на яких функція набуває додатних значень, і на яких — від'ємних;
- 3) проміжки зростання й спадання функції.

7. Побудуйте графік і визначте основні властивості функцій:

1) $f(x) = \sin \frac{x}{2}$; 2) $f(x) = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;
3) $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$; 4) $f(x) = 1 - \cos 3x$.

8. Укажіть кількість коренів рівняння $2 \cos \frac{x}{2} = a$ залежно від значень параметра a на проміжку $[0; 2\pi]$.

9. Побудуйте графік функції:

1) $y = \begin{cases} \sin x, & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x, & \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} \cos x, & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{ctg} x, & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi. \end{cases}$

10. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right); \quad 2) y = \operatorname{ctg}\left(3\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right).$$

11. Побудуйте графік рівняння:

$$1) |y| - 1 = 2 \operatorname{tg} 4|x|; \quad 2) |y - 1| = 3 \operatorname{tg}\left(|x| - \frac{\pi}{3}\right);$$
$$3) \left|y + \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2} \operatorname{tg}(3|x| - 1); \quad 4) |y| + \frac{1}{2} = 2 \operatorname{ctg}(|x| - 2).$$

12. Побудуйте графік рівняння:

$$1) \sin \pi(x^2 + y^2) = 1; \quad 2) \sin x + \sin y = -2.$$

Рівень С

1. Побудуйте графік і визначте основні властивості функції:

$$1) y = \frac{3}{2} \sin\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}; \quad 2) y = 2 \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - 3;$$
$$3) y = 3 \operatorname{ctg} 4x - \frac{1}{3}; \quad 4) y = -2 \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1.$$

2. Побудуйте графік функції та опишіть її основні властивості:

$$1) y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right); \quad 2) y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}; \quad 3) y = \operatorname{tg} x - 2;$$
$$4) y = \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right); \quad 5) y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x; \quad 6) y = \operatorname{ctg} x + 1.$$

3. Побудуйте графік функції та опишіть її основні властивості:

$$1) y = 1 + \cos x; \quad 2) y = 3 \cos x; \quad 3) y = \cos x - 2;$$
$$4) y = \cos 3x - 1; \quad 5) y = \cos 2x; \quad 6) y = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$

4. Укажіть амплітуду, циклічну частоту, початкову фазу та фазу гармонічного коливання:

$$1) y = -3 \cos\left(-\pi x + \frac{2\pi}{3}\right); \quad 2) y = -\frac{1}{3} \sin\left(-7x + \frac{\pi}{3}\right).$$

5. Побудуйте графік функції:

$$1) y = -2 \sin\left(2|x| + \frac{\pi}{3}\right) + 2; \quad 2) y = -\frac{1}{2} \cos\left(2|x| + \frac{\pi}{4}\right).$$

6. Побудуйте графік рівняння:

$$1) |y| = \left|2 \operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)\right|; \quad 2) |y| = 2 \left|\operatorname{ctg}\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)\right|;$$
$$3) |y| = 2 \left|\operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)\right|; \quad 4) |y| = 0,5 \left|\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)\right|.$$

- 7. Творче завдання.** Створіть застосунок, який ілюстрував би побудову графіків функцій та рівнянь, що містять тригонометричні вирази, за допомогою геометричних перетворень.

ІХ. Рефлексія (1–2 хв)

- 1) На уроці я дізнався/дізналася
- 2) Мені найбільше запам'яталося
- 3) Для мене було найцікавішим
- 4) Для мене було найскладнішим
- 5) Я припустився/припустилася помилки
- 6) Я хочу повторити, аби краще зрозуміти
- 7) Поради собі до наступного уроку

Можливі теми проєктів

- 1.** Перетворення графіків тригонометричних функцій при вивченні хвильових процесів.
- 2.** Створення інтерактивної ілюстрації побудови графіків функцій $y = A\operatorname{tg}(kx + b)$ та $y = A\operatorname{ctg}(kx + b)$ засобами Geogebra чи Desmos.
- 3.** Графічний метод розв'язування тригонометричних рівнянь з параметрами.
- 4.** Застосування перетворень графіків тригонометричних функцій у будівництві та в архітектурі.
- 5.** Моделювання добових температур за допомогою тригонометричних функцій.