

Тема 2.

Співвідношення між тригонометричними функціями

Урок 1. Залежність між тригонометричними функціями даного кута

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) ознайомитесь із основною тригонометричною тотожністю;
- 2) навчитесь обчислювати значення синуса кута за значенням його косинуса;
- 3) навчитесь обчислювати значення косинуса кута за значенням його синуса;
- 4) навчитесь обчислювати значення косинуса кута за значенням його тангенса;
- 5) навчитесь обчислювати значення синуса кута за значенням його котангенса;
- 6) дізнаєтесь, як пов'язані між собою тангенс і котангенс кута;
- 7) навчитесь використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Знайдіть косинус найбільшого кута трикутника зі сторонами 6 см, 8 см та 10 см.
2. Обчисліть площу трикутника зі сторонами 4 см і 5 см, якщо кут між якими дорівнює 60° .
3. Запишіть рівняння кола, центр якого міститься в початку координат, а радіус кола дорівнює 5.
4. Укажіть число, обернене до числа $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

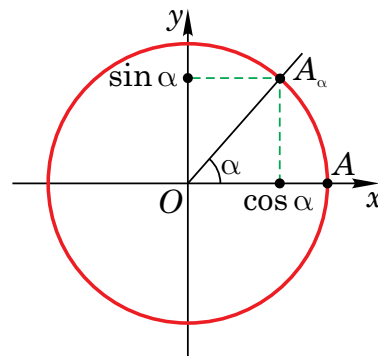
5. Відомо, що $1 - x^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Чому дорівнює $x^2 - 1$?

III. Основна тригонометрична тотожність

Нагадаємо, що ординату точки A_α одиничного кола, яка відповідає куту α повороту точки $A(1; 0)$ називають *синусом* кута α (позначають $\sin \alpha$), а абсцису точки A_α називають *косинусом* кута α (позначають $\cos \alpha$).

Оскільки координати усіх точок, які належать тригонометричному колу задовольняють рівняння $x^2 + y^2 = 1$, то правильною є рівність $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.

Рівність $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ називають **основною тригонометричною тотожністю**.

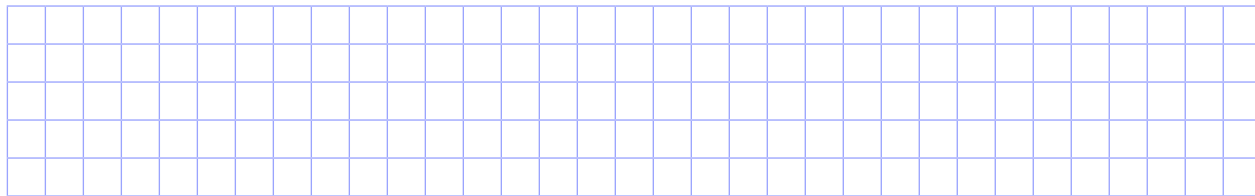


Приклад 1. Чи можуть синус та косинус деякого кута одночасно дорівнювати нулю?

Розв'язання. Припустимо існує такий кут α , що $\sin \alpha = 0$ і $\cos \alpha = 0$, але тоді $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 0$, що суперечить основній тригонометричній тотожності.

Відповідь. Не можуть.

Приклад 2. Чи можуть одночасно виконуватися рівності $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ і $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$?



IV. Обчислення значень синуса кута за значенням косинуса

Нехай $\cos \alpha = a$, тоді використаємо основну тригонометричну тотожність:

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha,$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - a^2,$$

$$|\sin \alpha| = \sqrt{1 - a^2},$$

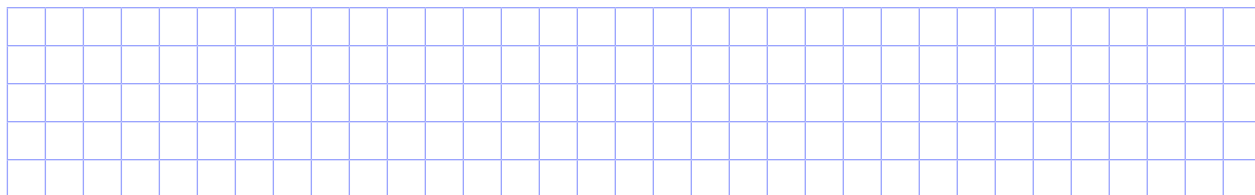
$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - a^2}.$$

Знак «+» чи «-» обираємо в залежності від кута α .

1) Якщо α — кут I або II чверті, то $\sin \alpha > 0$.

2) Якщо α — кут III або IV чверті, то $\sin \alpha < 0$.

Приклад 3. Знайдіть значення $\sin \alpha$, якщо $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{3}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.



V. Обчислення значень косинуса кута за значенням синуса

Нехай $\sin \alpha = a$, тоді використаємо основну тригонометричну тотожність:

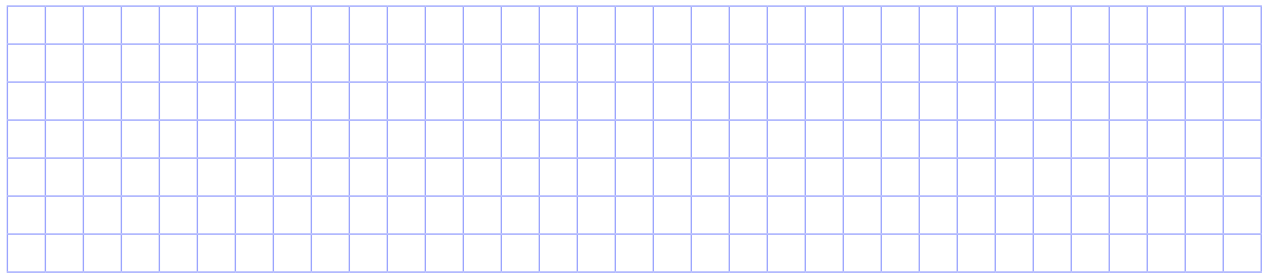
$$\begin{aligned}\cos^2 \alpha &= 1 - \sin^2 \alpha, \\ \cos^2 \alpha &= 1 - a^2, \quad |\cos \alpha| = \sqrt{1 - a^2}, \\ \cos \alpha &= \pm \sqrt{1 - a^2}.\end{aligned}$$

Знак «+» чи «-» обираємо в залежності від кута α .

1) Якщо α — кут I або IV чверті, то $\cos \alpha > 0$.

2) Якщо α — кут II або III чверті, то $\cos \alpha < 0$.

Приклад 4. Знайдіть значення $\cos \alpha$, якщо $\sin \alpha = -\frac{2}{7}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.



VI. Обчислення значення косинуса кута за значенням тангенса

Якщо $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, то поділимо обидві частини основної тригонометричної то-

тожності $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ на $\cos^2 \alpha$: $\frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.

Врахуємо, що $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$, і отримаємо тотожність $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, яка справедлива

для $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

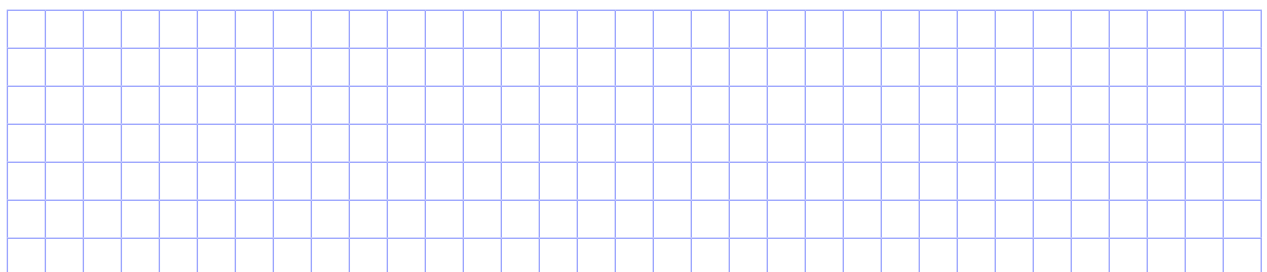
Таким чином, якщо $\operatorname{tg} \alpha = a$, то $1 + a^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + a^2}$, $\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}$.

Знак «+» чи «-» обираємо в залежності від кута α .

1) Якщо α — кут I або IV чверті, то $\cos \alpha > 0$.

2) Якщо α — кут II або III чверті, то $\cos \alpha < 0$.

Приклад 5. Відомо, що $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ і $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$. Знайдіть $\cos \alpha$.



VII. Обчислення значень синуса кута за значенням котангенса

Якщо $\alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$, то поділимо обидві частини основної тригонометричної тотожності $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ на $\sin^2 \alpha$:

$$\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

Врахуємо, що $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$ і отримаємо тотожність $\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, що справедлива для $\alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

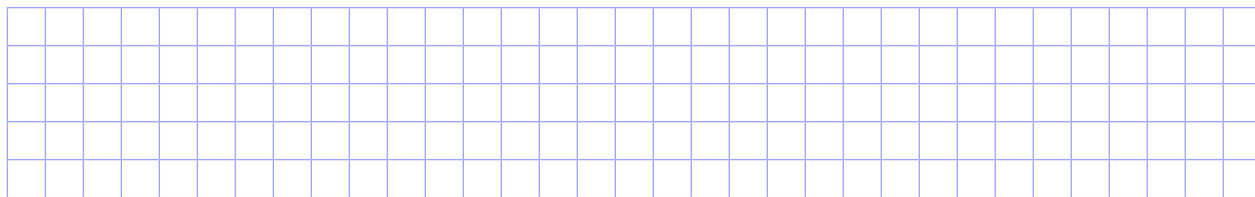
Таким чином, якщо $\operatorname{ctg} \alpha = b$, то $b^2 + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, $\sin^2 \alpha = \frac{1}{b^2 + 1}$, $\sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{b^2 + 1}}$.

Знак «+» чи «-» обираємо в залежності від кута α :

1) Якщо α – кут I або II чверті, то $\sin \alpha > 0$.

2) Якщо α – кут III або IV чверті, то $\sin \alpha < 0$.

Приклад 8. Відомо, що $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{ctg} \alpha = 3$. Знайдіть $\sin \alpha$.



VIII. Добуток тангенса та котангенса даного кута

Тангенсом кута α називають відношення синуса цього кута до його косинуса:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Котангенсом кута α називають відношення косинуса цього кута до його синуса:

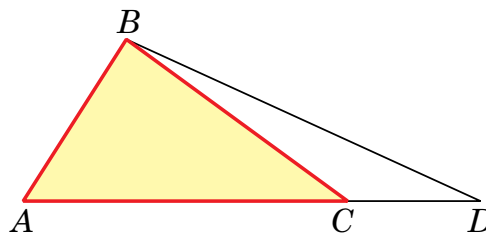
$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \alpha \neq \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Таким чином, тотожність $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ — правильна для усіх α , крім $\alpha = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

IX. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Земельна ділянка фермера має форму трикутника ABC , де $AB = 2$ км, $BC = 3$ км, $AC = 4$ км (див. рисунок). Поряд продається ділянка землі, яка має форму трикутника BCD (див. рисунок). Фермеру потрібно обчислити площу своєї і сусідської ділянки разом, щоб розуміти певні переваги від придбання ділянки землі, проте йому лише відомо, що $CD = 1$ км. Допоможіть фермеру обчислити загальну площу земельних ділянок.



Задача 2. Олімпіадна задача. Доведіть нерівність $\frac{1-|\cos x|}{1+|\cos x|} \leq \sin^2 x$.

Х. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Чи можуть одночасно виконуватися рівності:

1) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ і $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$; 2) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ і $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{2,5}$?

2. Обчисліть $\sin \alpha$, якщо $\cos \alpha = 0,6$ і $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

3. Якщо $\cos \alpha = 0,8$, то обчисліть значення $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$ за умови, що $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.

4. Обчисліть $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = -1$ і $270^\circ < \alpha < 360^\circ$.

5. Спростіть вирази:

1) $1 - \sin^2 \alpha$; 2) $1 - \cos^2 \alpha$; 3) $\cos^2 \alpha - 1$; 4) $\sin^2 \alpha - 1$.

6. Обчисліть $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$.

Рівень В

1. Чи можуть одночасно виконуватися рівності $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ і $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{2,5}$?

2. Знайдіть значення $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\sin \alpha = \frac{8}{17}$.

3. Обчисліть значення решти тригонометричних функцій за даним значенням однієї з них $\cos x = -\frac{7}{25}$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

4. Обчисліть значення решти тригонометричних функцій за даним значенням однієї з них $\operatorname{tg} x = 2$, $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

5. Обчисліть значення решти тригонометричних функцій за даним значенням однієї з них $\operatorname{ctg} x = \frac{7}{24}$, $180^\circ < x < 270^\circ$.

6. Обчисліть значення решти тригонометричних функцій за даним значенням однієї з них $\sin x = -\frac{12}{13}$, $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

7. Доведіть нерівність $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha \geq 1$, якщо $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

8. Обчисліть $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

9. Обчисліть $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$.

10. Знайдіть $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 3$.

11. Дано $\sin \alpha + \cos \alpha = p$. Обчисліть:

1) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$;

2) $\sin \alpha - \cos \alpha$.

12. Дано $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = p$. Обчисліть:

1) $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$;

2) $\operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{ctg}^3 \alpha$.

Рівень С

1. Відомо, що $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, $\frac{1}{\cos \alpha} = 1 + a$. Обчисліть $\operatorname{tg} \alpha$. Яким має бути число a ?

2. Обчисліть $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$, якщо $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{2}{5}$.

3. Доведіть нерівність $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha \geq 1$, якщо $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

4. Обчисліть $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$, якщо $\operatorname{ctg} \alpha = 1, (2)$.

5. Знайдіть $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$ та $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$, якщо $\sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{1}{2}$.

6. Знайдіть $\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} + \operatorname{ctg}^2 \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 5$.

7. *Творче завдання.* Напишіть програму, яка за даним значенням деякої тригонометричної функції обчислювала б значення інших основних тригонометричних функцій.

Рефлексія

1. Я знаю основну тригонометричну тотожність.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

2. Я вмію обчислювати значення синуса кута за значенням його косинуса.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

3. Я вмію обчислювати значення косинуса кута за значенням його синуса.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

4. Я вмію обчислювати значення косинуса кута за значенням його тангенса.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

5. Я вмію обчислювати значення синуса кута за значенням його котангенса.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

6. Я знаю, який взаємозв'язок між тангенсом і котангенсом кута.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

7. Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

Можливі теми проєктів

1. Геометричне обґрунтування основних тригонометричних тотожностей.
2. Використання тригонометричних тотожностей у практичних задачах.
3. Створення ментальної (мисленневої) карти тригонометричних тотожностей.
4. Аналіз завдань ЗНО/НМТ на тему: «Основні співвідношення між тригонометричними функціями».
5. Використання основних співвідношень між тригонометричними функціями в задачах геометрії.







