

11

Тема 2. Співвідношення між тригонометричними функціями

Урок 1. Залежність між тригонометричними функціями даного кута

Тип уроку: урок засвоєння нових знань.

План уроку

1. Основна тригонометрична тотожність.
2. Обчислення значень синуса кута за значенням косинуса.
3. Обчислення значень косинуса кута за значенням синуса.
4. Обчислення значень косинуса кута за значенням тангенса.
5. Обчислення значень синуса кута за значенням котангенса.
6. Добуток тангенса та котангенса одного й того самого кута.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

виокремлює в конкретній специфічній проблемній ситуації її складові частини, які можуть бути розв'язані математичними методами [12 МАО 1.1.1–2 П];

обирає серед кількох різних стратегій розв'язання специфічних проблемних ситуацій таку, що задовольняє певні умови [12 МАО 2.2.2–1 П];

визначає, яких даних недостатньо чи є надлишкові дані, під час розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.

- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.
- 6) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.
- 7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.
- 9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівень В або рівень С.
- 10) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Чи існує взаємозв'язок між різними тригонометричними функціями?
- 2) Чому математики шукають різноманітні способи для спрощення математичних виразів?
- 3) Чи можна подати усі тригонометричні функції через одну з них?
- 4) Чи можна уявити собі ситуацію, коли неправильне використання певної формули привело би до катастрофи в будівництві чи в авіації?
- 5) Чи можна отримати одну й ту саму формулу із застосуванням абсолютно різних підходів доведення формули?

II. Повторення (4–5 хв)

1. Знайдіть косинус найбільшого кута трикутника зі сторонами 6 см, 8 см та 10 см.
Відповідь. 0.
2. Обчисліть площу трикутника зі сторонами 4 см і 5 см, якщо кут між якими дорівнює 60° .
Відповідь. $5\sqrt{3}$ см².
3. Запишіть рівняння кола, центр якого міститься в початку координат, а радіус кола дорівнює 5.
Відповідь. $x^2 + y^2 = 25$.

4. Укажіть число, обернене до числа $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

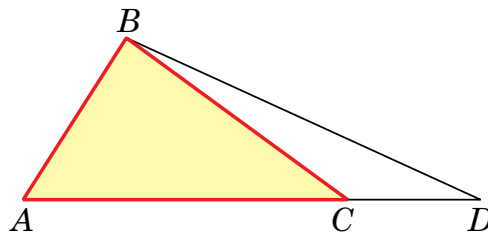
Відповідь. $\sqrt{3}$.

5. Відомо, що $1 - x^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Чому дорівнює $x^2 - 1$?

Відповідь. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Земельна ділянка фермера має форму трикутника ABC , де $AB = 2$ км, $BC = 3$ км, $AC = 4$ км (див. рисунок). Поряд продається ділянка землі, яка має форму трикутника BCD (див. рисунок). Фермеру потрібно обчислити площу своєї і сусідської ділянки разом, щоб розуміти певні переваги від придбання ділянки землі, проте йому лише відомо, що $CD = 1$ км. Допоможіть фермеру обчислити загальну площу земельних ділянок.



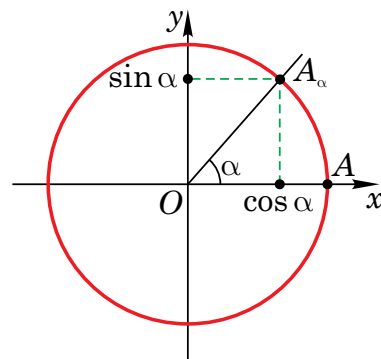
Задача 2. Олімпіадна задача. Доведіть нерівність $\frac{1 - |\cos x|}{1 + |\cos x|} \leq \sin^2 x$.

III. Основна тригонометрична тотожність

Нагадаємо, що ординату точки A_α одиничного кола, яка відповідає куту α повороту точки $A(1; 0)$ називають *синусом* кута α (позначають $\sin \alpha$), а абсцису точки A_α називають *косинусом* кута α (позначають $\cos \alpha$).

Оскільки координати усіх точок, які належать тригонометричному колу задовольняють рівняння $x^2 + y^2 = 1$, то правильною є рівність $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.

Рівність $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ називають *основною тригонометричною тотожністю*.



Ілюстративні приклади

6. Чи можуть синус та косинус деякого кута одночасно дорівнювати нулю?

Розв'язання. Припустимо існує такий кут α , що $\sin \alpha = 0$ і $\cos \alpha = 0$, але тоді $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 0$, що суперечить основній тригонометричній тотожності.

Відповідь. Не можуть.

7. Чи можуть одночасно виконуватися рівності $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ і $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$?

Розв'язання. Перевіримо виконання тотожності $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{8}{9} = \frac{9}{9} = 1.$$

Отже, задані рівності можуть виконуватися одночасно.

Відповідь. Можуть.

8. Чи можуть одночасно виконуватися рівності $\sin \alpha = \frac{a}{a+2}$, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{1+a}}{a+2}$, якщо $a \neq -2$?

Розв'язання. Перевіримо виконання тотожності $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$:

$$\left(\frac{a}{a+2}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{1+a}}{a+2}\right)^2 = \frac{a^2}{(a+2)^2} + \frac{4(1+a)}{(a+2)^2} = \frac{a^2 + 4a + 4}{(a+2)^2} = 1.$$

Отже, дані рівності можуть виконуватися одночасно.

Відповідь. Можуть.

IV. Обчислення значень синуса кута за значенням косинуса

Нехай $\cos \alpha = a$, тоді використаємо основну тригонометричну тотожність:

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha,$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - a^2,$$

$$|\sin \alpha| = \sqrt{1 - a^2},$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - a^2}.$$

Знак «+» чи «-» обираємо в залежності від кута α .

1) Якщо α — кут I або II чверті, то $\sin \alpha > 0$.

2) Якщо α — кут III або IV чверті, то $\sin \alpha < 0$.

Ілюстративні приклади

9. Знайдіть значення $\sin \alpha$, якщо $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{3}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Розв'язання. Оскільки $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$, то $\sin^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2$,

$$\sin^2 \alpha = 1 - \frac{2}{9}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{7}{9}, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3} \quad \text{або} \quad \sin \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Оскільки $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, тобто α — кут II чверті, то $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

Відповідь. $\frac{\sqrt{7}}{3}$.

10. Знайдіть значення $\sin \alpha$, якщо $\cos \alpha = 0,28$ і $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Розв'язання. Із основної тригонометричної тотожності:

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha, \quad \sin^2 \alpha = 1 - 0,28^2,$$

$$\sin^2 \alpha = (1 - 0,28)(1 + 0,28),$$

$$\sin^2 \alpha = 0,72 \cdot 1,28, \quad \sin^2 \alpha = 2 \cdot 0,36 \cdot 2 \cdot 0,64,$$

$$\sin^2 \alpha = 2^2 \cdot 0,6^2 \cdot 0,8^2,$$

$$\sin \alpha = 0,96 \quad \text{або} \quad \sin \alpha = -0,96.$$

Оскільки $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, тобто α — кут IV чверті, то $\sin \alpha = -0,96$.

Відповідь. $-0,96$.

V. Обчислення значень косинуса кута за значенням синуса

Нехай $\sin \alpha = a$, тоді використаємо основну тригонометричну тотожність:

$$\begin{aligned}\cos^2 \alpha &= 1 - \sin^2 \alpha, \\ \cos^2 \alpha &= 1 - a^2, \quad |\cos \alpha| = \sqrt{1 - a^2}, \\ \cos \alpha &= \pm \sqrt{1 - a^2}.\end{aligned}$$

Знак «+» чи «-» обираємо в залежності від кута α .

1) Якщо α — кут I або IV чверті, то $\cos \alpha > 0$.

2) Якщо α — кут II або III чверті, то $\cos \alpha < 0$.

Ілюстративний приклад

11. Знайдіть значення $\cos \alpha$, якщо $\sin \alpha = -\frac{2}{7}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Розв'язання. $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$, $\cos^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{2}{7}\right)^2$, $\cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{49}$, $\cos^2 \alpha = \frac{45}{49}$,

звідси: $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{5}}{7}$ або $\cos \alpha = -\frac{3\sqrt{5}}{7}$.

Оскільки $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, тобто α — кут III чверті, то $\cos \alpha = -\frac{3\sqrt{5}}{7}$.

Відповідь. $-\frac{3\sqrt{5}}{7}$.

VI. Обчислення значення косинуса кута за значенням тангенса

Якщо $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, то поділимо обидві частини основної тригонометричної то-

тожності $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ на $\cos^2 \alpha$: $\frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.

Врахуємо, що $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$, і отримаємо тотожність $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, яка справедлива

для $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Таким чином, якщо $\operatorname{tg} \alpha = a$, то $1 + a^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + a^2}$, $\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}$.

Знак «+» чи «-» обираємо в залежності від кута α .

1) Якщо α — кут I або IV чверті, то $\cos \alpha > 0$.

2) Якщо α — кут II або III чверті, то $\cos \alpha < 0$.

Ілюстративний приклад

12. Відомо, що $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ і $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$. Знайдіть $\cos \alpha$.

Розв'язання. $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, $1 + \left(\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, $1 + \frac{25}{144} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{169}{144}$,

$$\cos^2 \alpha = \frac{144}{169}.$$

Отже, $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ або $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$.

Оскільки $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, тобто α — кут I чверті, то $\cos \alpha = \frac{12}{13}$.

Відповідь. $\frac{12}{13}$.

VII. Обчислення значення синуса кута за значенням котангенса

Якщо $\alpha \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, то поділимо обидві частини основної тригонометричної тотожності $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ на $\sin^2 \alpha$:

$$\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

Врахуємо, що $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$, і отримаємо тотожність $\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, яка справедлива для $\alpha \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Таким чином, якщо $\operatorname{ctg} \alpha = b$, то $b^2 + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, $\sin^2 \alpha = \frac{1}{b^2 + 1}$, $\sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{b^2 + 1}}$.

Знак «+» чи «-» обираємо в залежності від кута α .

1) Якщо α — кут I або II чверті, то $\sin \alpha > 0$.

2) Якщо α — кут III або IV чверті, то $\sin \alpha < 0$.

Ілюстративний приклад

13. Відомо, що $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{ctg} \alpha = 3$. Знайдіть $\sin \alpha$.

Розв'язання. $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, $1 + 3^2 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, $\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 10$, $\sin^2 \alpha = \frac{1}{10}$.

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \text{ або } \sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Оскільки $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$, тобто α — кут III чверті, то $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Відповідь. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

VI. Обчислення значень косинуса кута за значенням тангенса

Якщо $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, то поділимо обидві частини основної тригонометричної тотожності $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ на $\cos^2 \alpha$:

$$\frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

Врахуємо, що $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$ і отримаємо тотожність $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, що справедлива для $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Таким чином, якщо } \operatorname{tg} \alpha = a, \text{ то } 1 + a^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + a^2}, \cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Знак «+» чи «-» обираємо в залежності від кута α :

1) Якщо α – кут I або IV чверті, то $\cos \alpha > 0$.

2) Якщо α – кут II або III чверті, то $\cos \alpha < 0$.

Ілюстративний приклад

12. Відомо, що $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ і $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$. Знайдіть $\cos \alpha$.

$$\text{Розв'язання. } 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad 1 + \left(\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad 1 + \frac{25}{144} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{169}{144},$$
$$\cos^2 \alpha = \frac{144}{169}.$$

$$\text{Отже, } \cos \alpha = \frac{12}{13} \text{ або } \cos \alpha = -\frac{12}{13}.$$

$$\text{Оскільки } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \text{ тобто } \alpha \text{ – кут I чверті, то } \cos \alpha = \frac{12}{13}.$$

$$\text{Відповідь. } \frac{12}{13}.$$

VII. Обчислення значень синуса кута за значенням котангенса

Якщо $\alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$, то поділимо обидві частини основної тригонометричної тотожності $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ на $\sin^2 \alpha$:

$$\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

Врахуємо, що $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$ і отримаємо тотожність $\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, що справедлива для $\alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Таким чином, якщо } \operatorname{ctg} \alpha = b, \text{ то } b^2 + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \sin^2 \alpha = \frac{1}{b^2 + 1}, \sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{b^2 + 1}}.$$

Знак «+» чи «-» обираємо в залежності від кута α :

1) Якщо α – кут I або II чверті, то $\sin \alpha > 0$.

2) Якщо α – кут III або IV чверті, то $\sin \alpha < 0$.

Ілюстративний приклад

- 13.** Відомо, що $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{ctg} \alpha = 3$. Знайдіть $\sin \alpha$.

Розв'язання. $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, $1 + 3^2 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, $\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 10$, $\sin^2 \alpha = \frac{1}{10}$.

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \text{ або } \sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Оскільки $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$, тобто α – кут III чверті, то $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Відповідь. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

VIII. Добуток тангенса та котангенса даного кута

Тангенсом кута α називають відношення синуса цього кута до його косинуса:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Котангенсом кута α називають відношення косинуса цього кута до його синуса:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \alpha \neq \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Таким чином, тотожність $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ — правильна для усіх α , крім $\alpha = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ілюстративні приклади

- 14.** Чи можуть одночасно виконуватися рівності $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2} - 1$ і $\operatorname{ctg} \alpha = 1 + \sqrt{2}$?

Розв'язання. Перевіримо виконання тотожності:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = (\sqrt{2} - 1)(1 + \sqrt{2}) = \sqrt{2}^2 - 1 = 1.$$

Отже, дані рівності можуть виконуватися одночасно.

Відповідь. Можуть.

- 15.** Дано $\operatorname{tg} \alpha = 3\frac{15}{16}$. Знайдіть $\operatorname{ctg} \alpha$.

Розв'язання. Оскільки $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$, то $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$,

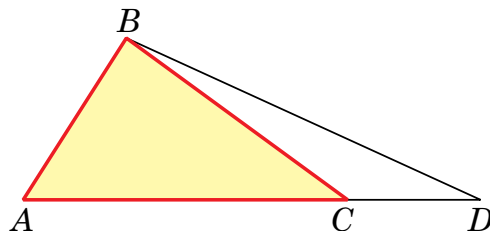
$$\operatorname{ctg} \alpha = 1 : 3\frac{15}{16} = 1 : \frac{63}{16} = \frac{16}{63}.$$

Відповідь. $\frac{16}{63}$.

IX. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Земельна ділянка фермера має форму трикутника ABC , де $AB = 2$ км, $BC = 3$ км, $AC = 4$ км (див. рисунок). Поряд продається ділянка землі, яка має форму трикутника BCD (див. рисунок). Фермеру потрібно обчислити площу своєї і сусідської ділянки разом, щоб розуміти певні переваги від придбання ділянки землі, проте йому лише відомо, що $CD = 1$ км. Допоможіть фермеру обчислити загальну площу земельних ділянок.



Розв'язання. 1) У трикутнику ABC , за теоремою косинусів,
 $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle A$, $9 = 4 + 16 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos \angle A$,
 $\cos \angle A = \frac{4 + 16 - 9}{16} = \frac{11}{16}$.

2) Оскільки $\cos^2 \angle A + \sin^2 \angle A = 1$, то:

$$\sin^2 \angle A = 1 - \left(\frac{11}{16}\right)^2, \sin^2 \angle A = 1 - \frac{121}{256}, \sin^2 \angle A = \frac{135}{256}.$$

$$\text{Звідси } \sin \angle A = \frac{3\sqrt{15}}{16} \text{ або } \sin \angle A = -\frac{3\sqrt{15}}{16}.$$

$$\text{Оскільки } 0^\circ < \angle A < 180^\circ, \text{ то } \sin \angle A = \frac{3\sqrt{15}}{16}.$$

$$3) S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin \angle A, S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16} = \frac{15\sqrt{15}}{16} \approx 3,63 \text{ (км}^2\text{)}.$$

Відповідь. 3,63 км².

Задача 2. Олімпіадна задача. Доведіть нерівність $\frac{1 - |\cos x|}{1 + |\cos x|} \leq \sin^2 x$.

Доведення. Оскільки $0 \leq |\cos x| \leq 1$, то $|\cos x| \geq \cos^2 x$, $-|\cos x| \leq -\cos^2 x$,

$$1 - |\cos x| \leq 1 - \cos^2 x.$$

$$\text{Тому } \frac{1 - |\cos x|}{1 + |\cos x|} \leq \frac{1 - \cos^2 x}{1 + |\cos x|} = \frac{1 - \cos^2 x}{1 + |\cos x|} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 + |\cos x|} =$$

$$= 1 - |\cos x| \leq 1 - \cos^2 x = \sin^2 x, \text{ що й треба було довести.}$$

X. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Чи можуть одночасно виконуватися рівності:

$$1) \sin \alpha = \frac{2}{3} \text{ і } \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3};$$

$$2) \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ і } \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{2,5}?$$

2. Обчисліть $\sin \alpha$, якщо $\cos \alpha = 0,6$ і $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

3. Якщо $\cos \alpha = 0,8$, то обчисліть значення $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$ за умови, що $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.
4. Обчисліть $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = -1$ і $270^\circ < \alpha < 360^\circ$.
5. Спростіть вирази:
1) $1 - \sin^2 \alpha$; 2) $1 - \cos^2 \alpha$; 3) $\cos^2 \alpha - 1$; 4) $\sin^2 \alpha - 1$.
6. Обчисліть $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$.

Рівень В

- 1.** Чи можуть одночасно виконуватися рівності $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ і $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{2,5}$?
- 2.** Знайдіть значення $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\sin \alpha = \frac{8}{17}$.
- 3.** Обчисліть значення решти тригонометричних функцій за даним значенням однієї з них $\cos x = -\frac{7}{25}, \frac{\pi}{2} < x < \pi$.
- 4.** Обчисліть значення решти тригонометричних функцій за даним значенням однієї з них $\operatorname{tg} x = 2, \pi < x < \frac{3\pi}{2}$.
- 5.** Обчисліть значення решти тригонометричних функцій за даним значенням однієї з них $\operatorname{ctg} x = \frac{7}{24}, 180^\circ < x < 270^\circ$.
- 6.** Обчисліть значення решти тригонометричних функцій за даним значенням однієї з них $\sin x = -\frac{12}{13}, \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.
- 7.** Доведіть нерівність $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha \geq 1$, якщо $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
- 8.** Обчисліть $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}$.
- 9.** Обчисліть $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$.
- 10.** Знайдіть $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 3$.
- 11.** Дано $\sin \alpha + \cos \alpha = p$. Обчисліть:
1) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$; 2) $\sin \alpha - \cos \alpha$.
- 12.** Дано $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = p$. Обчисліть:
1) $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$; 2) $\operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{ctg}^3 \alpha$.

Рівень С

1. Відомо, що $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, $\frac{1}{\cos \alpha} = 1 + a$. Обчисліть $\operatorname{tg} \alpha$. Яким має бути число a ?
2. Обчисліть $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$, якщо $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{2}{5}$.

3. Доведіть нерівність $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha \geq 1$, якщо $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
4. Обчисліть $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$, якщо $\operatorname{ctg} \alpha = 1, (2)$.
5. Знайдіть $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$ та $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$, якщо $\sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{1}{2}$.
6. Знайдіть $\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} + \operatorname{ctg}^2 \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 5$.
7. **Творче завдання.** Напишіть програму, яка за даним значенням деякої тригонометричної функції обчислювала б значення інших основних тригонометричних функцій.

XI. Рефлексія (1–2 хв)

- | | | |
|----|--|----|
| 1. | Я знаю основну тригонометричну тотожність. | Ні |
| | Так Ще треба потренуватися | |
| 2. | Я вмію обчислювати значення синуса кута за значенням його косинуса. | Ні |
| | Так Ще треба потренуватися | |
| 3. | Я вмію обчислювати значення косинуса кута за значенням його синуса. | Ні |
| | Так Ще треба потренуватися | |
| 4. | Я вмію обчислювати значення косинуса кута за значенням його тангенса. | Ні |
| | Так Ще треба потренуватися | |
| 5. | Я вмію обчислювати значення синуса кута за значенням його котангенса. | Ні |
| | Так Ще треба потренуватися | |
| 6. | Я знаю, який взаємозв'язок між тангенсом і котангенсом кута. | Ні |
| | Так Ще треба потренуватися | |
| 7. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту. | Ні |
| | Так Ще треба потренуватися | |

Можливі теми проєктів

1. Геометричне обґрунтування основних тригонометричних тотожностей.
2. Використання тригонометричних тотожностей у практичних задачах.
3. Створення ментальної (мисленневої) карти тригонометричних тотожностей.
4. Аналіз завдань ЗНО/НМТ на тему: «Основні співвідношення між тригонометричними функціями».
5. Використання основних співвідношень між тригонометричними функціями в задачах геометрії.