

11

Тема 2. Співвідношення між тригонометричними функціями

Урок 10. Урок–практикум. Застосування формул подвійного, потрійного та половинного аргументів

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) повторите формули подвійного аргументу;
- 2) повторите формули пониження степеня;
- 3) навчитеся використовувати формули половинного аргументу;
- 4) дізнаєтесь більше про формули потрійного аргументу;
- 5) пригадаєте формули вираження синуса та косинуса кута через тангенс половинного кута;
- 6) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

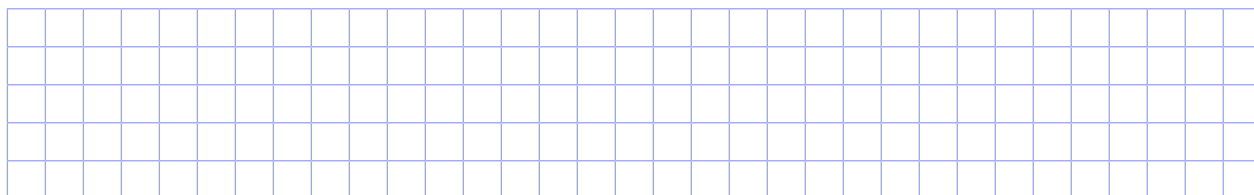
1. Обчисліть значення виразу $1 - \sin \alpha \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha$, якщо $\cos \alpha = 0,7$.
2. Спростіть вираз $\sin^2(180^\circ - x) + \sin^2(270^\circ - x)$.
3. Спростіть вираз $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$.
4. Чи можуть синус і косинус одного кута дорівнювати відповідно $-\frac{2}{\sqrt{5}}$ і $\frac{1}{\sqrt{5}}$?
5. Спростіть вираз $\operatorname{tg} \alpha \cdot (1 + \cos 2\alpha)$.

III. Обчислення значень тригонометричних функцій з використанням формул подвійного, потрійного та половинного аргументів

Нагадаємо формули, які потрібні для обчислення значень тригонометричних функцій і спрощення виразів.

Формули подвійного аргументу	$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \\ \cos 2\alpha &= 1 - 2\sin^2 \alpha, \\ \cos 2\alpha &= 2\cos^2 \alpha - 1, \\ \sin 2\alpha &= 2\sin \alpha \cos \alpha, \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.\end{aligned}$
Формули пониження степеня	$\begin{aligned}\sin^2 \alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \\ \cos^2 \alpha &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \\ \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}.\end{aligned}$
Формули половинного аргументу	$\begin{aligned}\sin \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \\ \cos \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}.\end{aligned}$
Формули потрійного аргументу	$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha, \\ \cos 3\alpha &= 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha.\end{aligned}$
Вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного аргументу	$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, & \cos \alpha &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.\end{aligned}$

Приклад 1. Обчисліть $\left(\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8}\right)\left(\cos^3 \frac{\pi}{8} - \sin^3 \frac{\pi}{8}\right)$.



Приклад 2. Обчисліть $\sin(2\alpha + \beta)$, якщо $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ і $\sin \beta = \frac{1}{2}$ при $1,5\pi < \alpha < 2\pi$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

[illegible]

Приклад 3. Обчисліть $\sin \frac{\alpha}{2}$, якщо $\cos \alpha = -\frac{161}{289}$ при $90^\circ < \frac{\alpha}{2} < 180^\circ$.

[illegible]

IV. Спростення та перетворення виразів

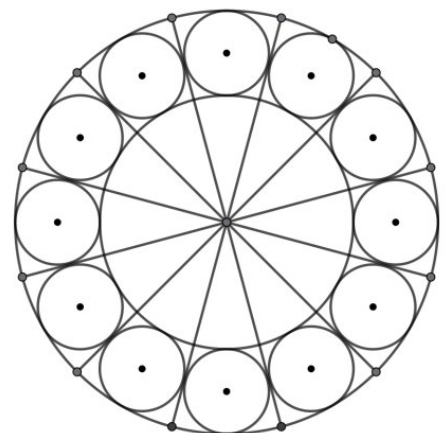
Приклад 4. Спростіть вираз $\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{1 + \cos \alpha}{2}$.

[illegible]

V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Ландшафтна дизайнерка планує створити клумбу, яка утворена двома концентричними колами, розбитими на 12 рівних секторів (див. рисунок). Радіус великого кола дорівнює 20 м. Дванадцять менших кіл, радіус кожного з яких r , є вписаними в сектори великого кола (дотикаються до радіусів сектора і до великого кола). Обчисліть r (у метрах), округливши відповідь до десятих. При обчисленні не можна використовувати таблиці значень тригонометричних функцій і проводити обчислення на калькуляторі.



Задача 2. Олімпіадна задача. Обчисліть $\operatorname{tg} 20^{\circ} \cdot \operatorname{tg} 40^{\circ} \cdot \operatorname{tg} 60^{\circ} \cdot \operatorname{tg} 80^{\circ}$.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Обчисліть:

1) $1 - 2\sin^2 22,5^\circ$;

2) $3 - 4\cos^2 \frac{11\pi}{12}$.

2. Спростіть вираз:

1) $\sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8}$;

2) $\sin^2 \frac{\pi}{8} - \cos^2 \frac{\pi}{8}$;

3) $\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$;

4) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8} \right)^2$.

3. Спростіть вираз:

1) $\frac{\sin t}{2\cos^2 \frac{t}{2}}$;

2) $\frac{\sin 4t}{\cos 2t}$;

3) $\frac{\cos t}{\cos \frac{t}{2} + \sin \frac{t}{2}}$;

4) $\frac{\cos 2t - \sin 2t}{\cos 4t}$.

4. Дано: $\operatorname{tg} 3\alpha = 3\frac{3}{7}$, $60^\circ < \alpha < 90^\circ$. Знайдіть $\sin \frac{3\alpha}{2}$, $\cos \frac{3\alpha}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{3\alpha}{2}$.

5. Дано: $\cos \alpha = \frac{3}{4}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Знайдіть $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$ і $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

6. Обчисліть:

1) $\operatorname{tg} 75^\circ$;

2) $\operatorname{tg} 112^\circ 30'$;

3) $\cos 75^\circ$;

4) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$.

Рівень В

1. Обчисліть:

1) $\left(\cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \right) \left(\cos^3 \frac{\pi}{12} + \sin^3 \frac{\pi}{12} \right)$;

2) $\sin \frac{\pi}{12} \left(\cos^6 \frac{\pi}{24} - \sin^6 \frac{\pi}{24} \right)$.

2. Спростіть вираз:

1) $2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$;

2) $(\sin 10^\circ + \sin 80^\circ)(\cos 80^\circ - \cos 10^\circ)$;

3) $(\sin(45^\circ + \alpha) - \sin(45^\circ - \alpha))(\cos(45^\circ + \alpha) + \cos(45^\circ - \alpha))$;

4) $\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) \right)^2 - \cos 4\alpha$;

3. Обчисліть:

1) $\cos \frac{\pi}{33} \cos \frac{2\pi}{33} \cos \frac{4\pi}{33} \cos \frac{8\pi}{33} \cos \frac{16\pi}{33}$;

2) $\cos \frac{\pi}{65} \cos \frac{2\pi}{65} \cos \frac{4\pi}{65} \cos \frac{8\pi}{65} \cos \frac{16\pi}{65} \cos \frac{32\pi}{65}$.

4. Відомо, що $\cos 2x = \frac{5}{13}$. Обчисліть:

1) $\sin^4 x + \cos^4 x$;

2) $\sin^8 x - \cos^8 x$.

5. Спростіть вираз $\sqrt{1 - \cos 2t} + \sqrt{1 + \cos 2t}$, якщо:

1) $t \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi \right]$; 2) $t \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right]$; 3) $t \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi \right]$; 4) $t \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2} \right]$.

6. Обчисліть:

1) $\frac{1 + \cos 40^\circ + \cos 80^\circ}{\sin 80^\circ + \sin 40^\circ} \cdot \operatorname{tg} 40^\circ$; 2) $\frac{1 - \cos 25^\circ + \cos 50^\circ}{\sin 50^\circ - \sin 25^\circ} - \operatorname{tg} 65^\circ$;
 3) $\frac{\sin 125^\circ}{\sin 55^\circ} - \frac{\cos 125^\circ}{\cos 55^\circ}$; 4) $\frac{\cos 150^\circ}{\sin 40^\circ} - \frac{\sin 150^\circ}{\cos 40^\circ}$.

7. Обчисліть:

1) $\operatorname{tg} 2\alpha$, якщо $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ при $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;
 2) $\operatorname{ctg} 2\alpha$, якщо $\sin \alpha = -0,3$ при $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

8. Спростіть вираз:

1) $\frac{1 - 2\sin \frac{x}{2} - \cos x}{1 + 2\sin \frac{x}{2} - \cos x}$; 2) $\frac{1 + 2\cos \frac{x}{2} + \cos x}{1 - 2\cos \frac{x}{2} + \cos x}$.

9. Обчисліть:

1) $4 \sin \frac{7\pi}{8} \cos \frac{7\pi}{8} \left(\cos^4 \frac{5\pi}{12} - \sin^4 \frac{5\pi}{12} \right)$;
 2) $4 \sin \frac{17\pi}{12} \cos \frac{17\pi}{12} \left(\cos^6 \frac{3\pi}{8} - \sin^6 \frac{3\pi}{8} \right)$;
 3) $\left(\frac{\sin 21^\circ}{\sin 7^\circ} - \frac{\cos 21^\circ}{\cos 7^\circ} \right) (\operatorname{ctg} 165^\circ - \operatorname{tg} 165^\circ)$.

10. Обчисліть:

1) $\frac{\cos \alpha}{2 - 3\sin \alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 3$; 2) $\frac{2\sin \alpha}{4 + 5\cos \alpha}$, якщо $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = -2$.

11. Спростіть вираз:

1) $0,125 \cos 4\alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$; 2) $\sin^2 \beta \operatorname{tg} \beta - \cos^2 \beta \operatorname{ctg} \beta + 2 \operatorname{ctg} 2\beta$;
 3) $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{2\cos 2\alpha}{1 + \sin(2\alpha + 1,5\pi)}$; 4) $\frac{1}{1 - \operatorname{tg} \beta} - \frac{\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \beta \right) \sin \beta}{\cos 2\beta}$.

12. Перевірте правильність рівності:

1) $8 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ - \sin 10^\circ = 2 \sin^2 40^\circ$;
 2) $\sin 50^\circ + 8 \sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = 2 \cos^2 20^\circ$.

Рівень С

1. Обчисліть:

1) $\sin^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^6 \frac{3\pi}{8} + \cos^6 \frac{3\pi}{8}$;
 2) $\cos^2 \frac{5\pi}{8} - \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{5\pi}{8} - \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^6 \frac{5\pi}{8} - \sin^6 \frac{5\pi}{8}$.

2. Обчисліть $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{24}$.
3. Спростіть вираз:
- 1) $\frac{3 + 4 \cos \alpha + \cos 2\alpha}{3 - 4 \cos \alpha + \cos 2\alpha}$; 2) $\frac{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha - \cos^2 \alpha}{2(\cos \alpha - 1)}$.
4. Спростіть вираз:
- 1) $\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos 2\alpha}} - \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 + \cos 2\alpha}}$, якщо $0^\circ < \alpha < 90^\circ$;
- 2) $\frac{\sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{1 - \sin \alpha}} - \frac{\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{1 + \sin \alpha}}$, якщо $0^\circ < \alpha < 180^\circ$.
5. Знайдіть величину кута A трикутника ABC , якщо:
- 1) $\sin^4 A = \cos^4 A + 0,5$;
- 2) $\sin^3 A \cos A = 0,25 - \cos^3 A \sin A$.
6. Знайдіть $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \cos\left(\frac{5\pi}{4} + \beta\right)$, якщо $\cos \beta \sin(3,5\pi + \beta) = m$. При яких значеннях m умова задачі має зміст?

Рефлексія

- 1) На уроці я дізнався/дізналася
-
-
- 2) Мені найбільше запам'яталося
-
-
- 3) Для мене було найцікавішим
-
-
- 4) Для мене було найскладнішим
-
-
- 5) Я припустився/припустилася помилки
-
-
- 6) Я хочу повторити, аби краще зрозуміти
-
-
- 7) Поради собі до наступного уроку
-
-

Можливі теми проєктів

1. Застосування формул кратних кутів у комп'ютерній графіці та анімації.
2. Формули пониження степеня для різних показників степеня.
3. Тригонометричні функції кратних кутів та поліном Чебишева.
4. Формули кратних кутів у фізиці коливань і хвиль.
5. Використання додаткових формул кратних кутів при розв'язуванні задач підвищеної складності.

