

11

Тема 2. Співвідношення між тригонометричними функціями

Урок 10. Урок–практикум. Застосування формул подвійного, потрійного та половинного аргументів

Тип уроку: урок формування вмінь і навичок.

План уроку

1. Обчислення значень тригонометричних функцій з використанням формул подвійного, потрійного та половинного аргументів.
2. Спрощення та перетворення виразів.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

обирає серед кількох різних стратегій розв'язання специфічних проблемних ситуацій таку, що задовольняє певні умови [12 МАО 2.2.2–1 П];

обирає математичну модель розв'язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов [12 МАО 3.2.2–1 П];

добирає доцільні математичні поняття, факти і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні задачі. Обирайте ілюстративні задачі на власний розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.

6) Пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач і навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

7) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

8) Можливі теми для створення проєктів запропоновані.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) В яких геометричних задачах може виникнути потреба використати тригонометричні функції подвійного та половинного аргументів?

2) Чи корисно вміти виразити будь-яку тригонометричну функцію через тангенс половинного аргументу? Які практичні застосування можуть мати ці формули?

3) Чи можна за допомогою циркуля і лінійки поділити кут навпіл, подвоїти кут, потроїти кут, розділити кут на три рівні частини? Опишіть, як би ви це зробили.

4) У яких розділах фізики можна було би застосувати формули кратних кутів?

5) Чи допомагають спрощувати тригонометричні вирази формули пониження степеня?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Обчисліть значення виразу $1 - \sin \alpha \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha$, якщо $\cos \alpha = 0,7$.

Відповідь. 0,49.

2. Спростіть вираз $\sin^2(180^\circ - x) + \sin^2(270^\circ - x)$.

Відповідь. 1.

3. Спростіть вираз $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$.

Відповідь. 0.

4. Чи можуть синус і косинус одного кута дорівнювати відповідно $-\frac{2}{\sqrt{5}}$ і $\frac{1}{\sqrt{5}}$?

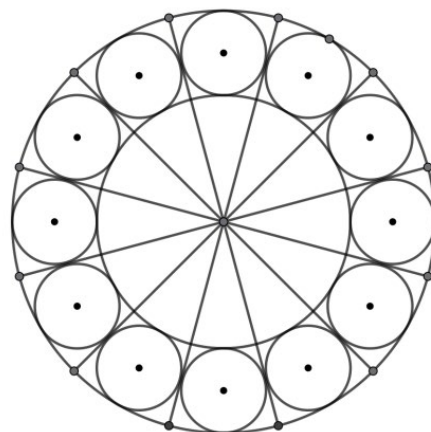
Відповідь. Так.

5. Спростіть вираз $\operatorname{tg} \alpha \cdot (1 + \cos 2\alpha)$.

Відповідь. $\sin 2\alpha$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Ландшафтна дизайнерка планує створити клумбу, яка утворена двома концентричними колами, розбитими на 12 рівних секторів (див. рисунок). Радіус великого кола дорівнює 20 м. Дванадцять менших кругів, радіус кожного з яких r , є вписаними в сектори великого кола (дотикаються до радіусів сектора і до великого кола). Обчисліть r (у метрах), округливши відповідь до десятих. При обчисленні не можна використовувати таблиці значень тригонометричних функцій і проводити обчислення на калькуляторі.



Задача 2. Олімпіадна задача. Обчисліть $\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ$.

III. Обчислення значень тригонометричних функцій з використанням формул подвійного, потрійного та половинного аргументів

Нагадаємо формули, які потрібні для обчислення значень тригонометричних функцій і спрощення виразів.

Формули подвійного аргументу	$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \\ \cos 2\alpha &= 1 - 2\sin^2 \alpha, \\ \cos 2\alpha &= 2\cos^2 \alpha - 1, \\ \sin 2\alpha &= 2\sin \alpha \cos \alpha, \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.\end{aligned}$
Формули пониження степеня	$\begin{aligned}\sin^2 \alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \\ \cos^2 \alpha &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \\ \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}.\end{aligned}$
Формули половинного аргументу	$\begin{aligned}\sin \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \\ \cos \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}.\end{aligned}$
Формули потрійного аргументу	$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha, \\ \cos 3\alpha &= 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha.\end{aligned}$

**Виразення тригонометричних
функцій через тангенс половинного
аргументу**

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}},$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Ілюстративні приклади

6. Обчисліть $\left(\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8} \right) \left(\cos^3 \frac{\pi}{8} - \sin^3 \frac{\pi}{8} \right)$.

Розв'язання. $\left(\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8} \right) \left(\cos^3 \frac{\pi}{8} - \sin^3 \frac{\pi}{8} \right) =$

$$= \left(\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8} \right) \left(\cos \frac{\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{8} \right) \left(\cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8} \right) =$$

$$= \left(\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} \right) \left(1 + \cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8} \right) = \cos \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8} \right) = \cos \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}(4 + \sqrt{2})}{8} = \frac{2\sqrt{2} + 1}{4}.$$

Відповідь. $\frac{2\sqrt{2} + 1}{4}.$

7. Обчисліть $\sin(2\alpha + \beta)$, якщо $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ і $\sin \beta = \frac{1}{2}$ при $1,5\pi < \alpha < 2\pi$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

Розв'язання. $\sin(2\alpha + \beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos 2\alpha,$

$$\cos \beta = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\cos \beta < 0),$$

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = -\frac{\sqrt{5}}{3} \quad (\sin \alpha < 0),$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \cdot \frac{2}{3} = -\frac{4\sqrt{5}}{9},$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \frac{4}{9} - 1 = -\frac{1}{9},$$

$$\sin(2\alpha + \beta) = -\frac{4\sqrt{5}}{9} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{4\sqrt{15} - 1}{18}.$$

Відповідь. $\frac{4\sqrt{15} - 1}{18}.$

8. Обчисліть $\sin \frac{\alpha}{2}$, якщо $\cos \alpha = -\frac{161}{289}$ при $90^\circ < \frac{\alpha}{2} < 180^\circ$.

Розв'язання. $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$, $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \frac{161}{289}}{2}} = \sqrt{\frac{225}{289}} = \frac{15}{17}$.

Відповідь. $\frac{15}{17}$.

9. Обчисліть $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$, якщо $\sin \beta = -\frac{40}{41}$ при $540^\circ < \beta < 630^\circ$.

Розв'язання. $\cos \beta = -\sqrt{1 - \left(-\frac{40}{41}\right)^2} = -\frac{9}{41}$, β — кут третьої чверті.

$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{1 + \cos \beta}}$, $\frac{\beta}{2}$ — кут четвертої чверті, тому $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} < 0$.

$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \frac{9}{41}}{1 - \frac{9}{41}}} = -\sqrt{\frac{50}{32}} = -\frac{5}{4}$.

Відповідь. $-\frac{5}{4}$.

10. Дано: $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$. Знайдіть $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$.

Розв'язання. $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = -\cos 2\alpha$.

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$; $\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1 - \frac{16}{9}}{1 + \frac{16}{9}} = -\frac{7}{25}$;

$\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = -\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$.

Відповідь. $\frac{7}{25}$.

11. Обчисліть $\sin 18^\circ$.

Розв'язання. За формулою зведення, маємо $\sin 36^\circ = \cos 54^\circ$.

Тоді $\sin(2 \cdot 18^\circ) = \cos(3 \cdot 18^\circ)$, $2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ = 4 \cos^3 18^\circ - 3 \cos 18^\circ$,

$2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ = \cos 18^\circ (4 \cos^2 18^\circ - 3)$, $2 \sin 18^\circ = 4 \cos^2 18^\circ - 3$,

$2 \sin 18^\circ = 4(1 - \sin^2 18^\circ) - 3$, $2 \sin 18^\circ = 4 - 4 \sin^2 18^\circ - 3$;

$4 \sin^2 18^\circ + 2 \sin 18^\circ - 1 = 0$.

Розв'яжемо квадратне рівняння відносно $\sin 18^\circ$ і врахуємо, що $\sin 18^\circ > 0$, отри-

муємо: $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

Відповідь. $\frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

IV. Спрощення та перетворення виразів

Ілюстративні приклади

- 12.** Спростіть вираз $\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{1 + \cos \alpha}{2}$.

Розв'язання. $\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{1 + \cos \alpha}{2} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\alpha}{2} =$

$$= \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Відповідь. $\sin^2 \frac{\alpha}{2}$.

- 13.** Спростіть вираз $\sqrt{\frac{\sin 4\alpha}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}} \cdot \frac{1}{\sin 2\alpha} + 1$, якщо $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$.

Розв'язання. $\sqrt{\frac{\sin 4\alpha}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}} \cdot \frac{1}{\sin 2\alpha} + 1 = \sqrt{\frac{\sin 4\alpha}{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}} \cdot \frac{1}{\sin 2\alpha} + 1 =$

$$= \sqrt{\frac{\sin 4\alpha}{\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}}} \cdot \frac{1}{\sin 2\alpha} + 1 = \sqrt{\frac{\sin 4\alpha \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}} \cdot \frac{1}{\sin 2\alpha} + 1 =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha \sin \alpha \cos \alpha}{\cos 2\alpha}} \cdot \frac{1}{\sin 2\alpha} + 1 = \frac{\sqrt{\sin^2 2\alpha}}{\sin 2\alpha} + 1 = \frac{|\sin 2\alpha|}{\sin 2\alpha} + 1.$$

Оскільки $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$, то $\frac{3\pi}{2} < 2\alpha < 2\pi$ і $\sin 2\alpha < 0$.

Тоді $\frac{|\sin 2\alpha|}{\sin 2\alpha} + 1 = \frac{-\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha} + 1 = 0$.

Відповідь. 0.

- 14.** Спростіть вираз $\frac{\cos^3 \alpha - \cos 3\alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin^3 \alpha + \sin 3\alpha}{\sin \alpha}$.

Розв'язання. $\frac{\cos^3 \alpha - \cos 3\alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin^3 \alpha + \sin 3\alpha}{\sin \alpha} =$

$$= \frac{\cos^3 \alpha - 4\cos^3 \alpha + 3\cos \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin^3 \alpha + 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha}{\sin \alpha} =$$

$$= \frac{3\cos \alpha - 3\cos^3 \alpha}{\cos \alpha} + \frac{3\sin \alpha - 3\sin^3 \alpha}{\sin \alpha} = \frac{3\cos \alpha(1 - \cos^2 \alpha)}{\cos \alpha} + \frac{3\sin \alpha(1 - \sin^2 \alpha)}{\sin \alpha} =$$

$$= 3\sin^2 \alpha + 3\cos^2 \alpha = 3$$

Відповідь. 3.

V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Ландшафтна дизайнерка планує створити клумбу, яка утворена двома концентричними колами, розбитими на 12 рівних секторів (див. рисунок). Радіус великого кола дорівнює 20 м. Дванадцять менших кругів, радіус кожного з яких r , є вписаними в сектори великого кола (дотикаються до радіусів сектора і до великого кола). Обчисліть r (у метрах), округливши відповідь до десятих. При обчисленні не можна використовувати таблиці значень тригонометричних функцій і проводити обчислення на калькуляторі.

Розв'язання. Виконаємо побудову (див. рисунок). Центр меншого круга O_1 лежить на бісектрисі центрального кута сектора.

Радіус меншого круга можна знайти з прямокутного трикутника OCO_1

$$(\angle OCO_1 = 90^\circ, \angle COO_1 = 15^\circ): \sin \angle COO_1 = \frac{CO_1}{OO_1},$$

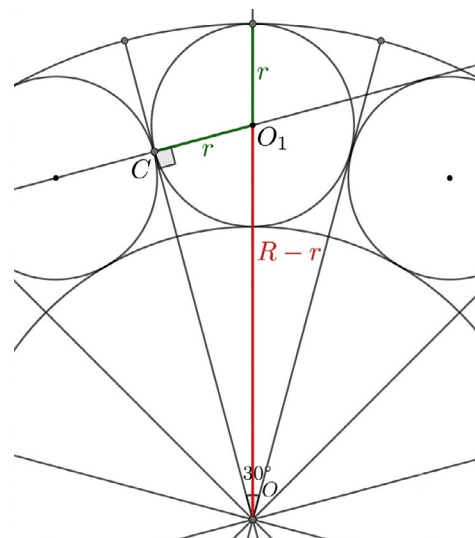
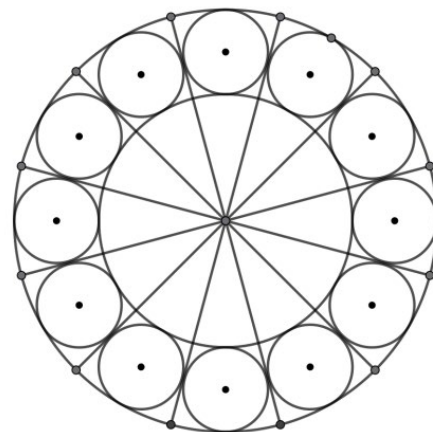
$$\sin 15^\circ = \frac{r}{R-r}, \quad R \sin 15^\circ - r \sin 15^\circ = r,$$

$$r(1 + \sin 15^\circ) = R \sin 15^\circ, \quad r = \frac{R \sin 15^\circ}{1 + \sin 15^\circ}.$$

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \approx 0,26.$$

$$\text{Отже, } r = \frac{20 \cdot 0,26}{1 + 0,26} \approx 4,1 \text{ (м)}.$$

Відповідь. 4,1 м.



Задача 2. Олімпіадна задача. Обчисліть $\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ$.

Розв'язання. Оскільки $\sin 3\alpha = 4 \sin \alpha \sin(60^\circ - \alpha) \sin(60^\circ + \alpha)$

і $\cos 3\alpha = 4 \cos \alpha \cos(60^\circ - \alpha) \cos(60^\circ + \alpha)$, то $\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) \operatorname{tg}(60^\circ + \alpha)$.

$$\begin{aligned} \text{Тоді } \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ &= \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg}(60^\circ - 20^\circ) \cdot \operatorname{tg}(60^\circ + 20^\circ) \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \\ &= \operatorname{tg}(3 \cdot 20^\circ) \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3. \end{aligned}$$

Відповідь 3.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Обчисліть:

1) $1 - 2\sin^2 22,5^\circ$;

2) $3 - 4\cos^2 \frac{11\pi}{12}$.

2. Спростіть вираз:

1) $\sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8}$;

2) $\sin^2 \frac{\pi}{8} - \cos^2 \frac{\pi}{8}$;

3) $\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$;

4) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8} \right)^2$.

3. Спростіть вираз:

1) $\frac{\sin t}{2\cos^2 \frac{t}{2}}$;

2) $\frac{\sin 4t}{\cos 2t}$;

3) $\frac{\cos t}{\cos \frac{t}{2} + \sin \frac{t}{2}}$;

4) $\frac{\cos 2t - \sin 2t}{\cos 4t}$.

4. Дано: $\operatorname{tg} 3\alpha = 3\frac{3}{7}$, $60^\circ < \alpha < 90^\circ$. Знайдіть $\sin \frac{3\alpha}{2}$, $\cos \frac{3\alpha}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{3\alpha}{2}$.

5. Дано: $\cos \alpha = \frac{3}{4}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Знайдіть $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$ і $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

6. Обчисліть:

1) $\operatorname{tg} 75^\circ$;

2) $\operatorname{tg} 112^\circ 30'$;

3) $\cos 75^\circ$;

4) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$.

Рівень В

1. Обчисліть:

1) $\left(\cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \right) \left(\cos^3 \frac{\pi}{12} + \sin^3 \frac{\pi}{12} \right)$;

2) $\sin \frac{\pi}{12} \left(\cos^6 \frac{\pi}{24} - \sin^6 \frac{\pi}{24} \right)$.

2. Спростіть вираз:

1) $2\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)$;

2) $(\sin 10^\circ + \sin 80^\circ)(\cos 80^\circ - \cos 10^\circ)$;

3) $(\sin(45^\circ + \alpha) - \sin(45^\circ - \alpha))(\cos(45^\circ + \alpha) + \cos(45^\circ - \alpha))$;

4) $\left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha \right) + \cos \left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha \right) \right)^2 - \cos 4\alpha$;

3. Обчисліть:

1) $\cos \frac{\pi}{33} \cos \frac{2\pi}{33} \cos \frac{4\pi}{33} \cos \frac{8\pi}{33} \cos \frac{16\pi}{33}$;

2) $\cos \frac{\pi}{65} \cos \frac{2\pi}{65} \cos \frac{4\pi}{65} \cos \frac{8\pi}{65} \cos \frac{16\pi}{65} \cos \frac{32\pi}{65}$.

4. Відомо, що $\cos 2x = \frac{5}{13}$. Обчисліть:

1) $\sin^4 x + \cos^4 x$;

2) $\sin^8 x - \cos^8 x$.

5. Спростіть вираз $\sqrt{1 - \cos 2t} + \sqrt{1 + \cos 2t}$, якщо:

1) $t \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi \right]$; 2) $t \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right]$; 3) $t \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi \right]$; 4) $t \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2} \right]$.

6. Обчисліть:

1) $\frac{1 + \cos 40^\circ + \cos 80^\circ}{\sin 80^\circ + \sin 40^\circ} \cdot \operatorname{tg} 40^\circ$; 2) $\frac{1 - \cos 25^\circ + \cos 50^\circ}{\sin 50^\circ - \sin 25^\circ} - \operatorname{tg} 65^\circ$;
3) $\frac{\sin 125^\circ}{\sin 55^\circ} - \frac{\cos 125^\circ}{\cos 55^\circ}$; 4) $\frac{\cos 150^\circ}{\sin 40^\circ} - \frac{\sin 150^\circ}{\cos 40^\circ}$.

7. Обчисліть:

1) $\operatorname{tg} 2\alpha$, якщо $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ при $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;
2) $\operatorname{ctg} 2\alpha$, якщо $\sin \alpha = -0,3$ при $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

8. Спростіть вираз:

1) $\frac{1 - 2\sin \frac{x}{2} - \cos x}{1 + 2\sin \frac{x}{2} - \cos x}$; 2) $\frac{1 + 2\cos \frac{x}{2} + \cos x}{1 - 2\cos \frac{x}{2} + \cos x}$.

9. Обчисліть:

1) $4 \sin \frac{7\pi}{8} \cos \frac{7\pi}{8} \left(\cos^4 \frac{5\pi}{12} - \sin^4 \frac{5\pi}{12} \right)$;
2) $4 \sin \frac{17\pi}{12} \cos \frac{17\pi}{12} \left(\cos^6 \frac{3\pi}{8} - \sin^6 \frac{3\pi}{8} \right)$;
3) $\left(\frac{\sin 21^\circ}{\sin 7^\circ} - \frac{\cos 21^\circ}{\cos 7^\circ} \right) (\operatorname{ctg} 165^\circ - \operatorname{tg} 165^\circ)$.

10. Обчисліть:

1) $\frac{\cos \alpha}{2 - 3\sin \alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 3$; 2) $\frac{2\sin \alpha}{4 + 5\cos \alpha}$, якщо $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = -2$.

11. Спростіть вираз:

1) $0,125 \cos 4\alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$; 2) $\sin^2 \beta \operatorname{tg} \beta - \cos^2 \beta \operatorname{ctg} \beta + 2 \operatorname{ctg} 2\beta$;
3) $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{2\cos 2\alpha}{1 + \sin(2\alpha + 1,5\pi)}$; 4) $\frac{1}{1 - \operatorname{tg} \beta} - \frac{\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \beta \right) \sin \beta}{\cos 2\beta}$.

12. Перевірте правильність рівності:

1) $8 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ - \sin 10^\circ = 2 \sin^2 40^\circ$;
2) $\sin 50^\circ + 8 \sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = 2 \cos^2 20^\circ$.

Рівень С

1. Обчисліть:

1) $\sin^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^6 \frac{3\pi}{8} + \cos^6 \frac{3\pi}{8}$;
2) $\cos^2 \frac{5\pi}{8} - \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{5\pi}{8} - \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^6 \frac{5\pi}{8} - \sin^6 \frac{5\pi}{8}$.

2. Обчисліть $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{24}$.
3. Спростіть вираз:
- 1) $\frac{3 + 4 \cos \alpha + \cos 2\alpha}{3 - 4 \cos \alpha + \cos 2\alpha}$; 2) $\frac{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha - \cos^2 \alpha}{2(\cos \alpha - 1)}$.
4. Спростіть вираз:
- 1) $\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos 2\alpha}} - \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 + \cos 2\alpha}}$, якщо $0^\circ < \alpha < 90^\circ$;
- 2) $\frac{\sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{1 - \sin \alpha}} - \frac{\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{1 + \sin \alpha}}$, якщо $0^\circ < \alpha < 180^\circ$.
5. Знайдіть величину кута A трикутника ABC , якщо:
- 1) $\sin^4 A = \cos^4 A + 0,5$;
- 2) $\sin^3 A \cos A = 0,25 - \cos^3 A \sin A$.
6. Знайдіть $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \cos\left(\frac{5\pi}{4} + \beta\right)$, якщо $\cos \beta \sin(3,5\pi + \beta) = m$. При яких значеннях m умова задачі має зміст?

VII. Рефлексія (1–2 хв)

- 1) На уроці я дізнався/дізналася
-
-
- 2) Мені найбільше запам'яталося
-
-
- 3) Для мене було найцікавішим
-
-
- 4) Для мене було найскладнішим
-
-
- 5) Я припустився/припустилася помилки
-
-
- 6) Я хочу повторити, аби краще зрозуміти
-
-
- 7) Поради собі до наступного уроку
-
-

Можливі теми проєктів

1. Застосування формул кратних кутів у комп'ютерній графіці та анімації.
2. Формули пониження степеня для різних показників степеня.
3. Тригонометричні функції кратних кутів та поліном Чебишева.
4. Формули кратних кутів у фізиці коливань і хвиль.
5. Використання додаткових формул кратних кутів при розв'язуванні задач підвищеної складності.