

11

Тема 2. Співвідношення між тригонометричними функціями

Урок 11. Урок–практикум. Спрощення виразів та доведення тотожностей

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) удосконалили навички спрощення тригонометричних виразів за допомогою формул кратних кутів;
- 2) закріпили вміння доводити тригонометричні тотожності, за формулами кратних кутів;
- 3) навчилися використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Спростіть вираз $\cos^2 \alpha - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$.
2. Обчисліть $\sin 3645^\circ$.
3. Спростіть вираз $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(\pi + \alpha) + \sin \alpha + \sin(2\pi + \alpha)$.
4. Укажіть найменший додатний період функції $y = \cos \frac{x}{3}$.
5. Обчисліть $\sin \alpha$, якщо $\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} = 1,4$.

III. Спрощення та перетворення виразів

Нагадаємо формули, які потрібні для обчислення значень тригонометричних функцій і спрощення виразів.

Формули подвійного аргументу	$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \\ \cos 2\alpha &= 1 - 2\sin^2 \alpha, \\ \cos 2\alpha &= 2\cos^2 \alpha - 1, \\ \sin 2\alpha &= 2\sin \alpha \cos \alpha, \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.\end{aligned}$
Формули пониження степеня	$\begin{aligned}\sin^2 \alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \\ \cos^2 \alpha &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \\ \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}.\end{aligned}$
Формули половинного аргументу	$\begin{aligned}\sin \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \\ \cos \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}.\end{aligned}$
Формули потрійного аргументу	$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha, \\ \cos 3\alpha &= 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha.\end{aligned}$
Вираження тригонометричних функцій кутів через тангенс половинного кута	$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \\ \cos \alpha &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.\end{aligned}$

Корисно довести також альтернативні формули потрійних кутів.

$$1) \sin 3\alpha = 4\sin \alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right);$$

$$2) \cos 3\alpha = 4\cos \alpha \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right);$$

$$3) \operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right);$$

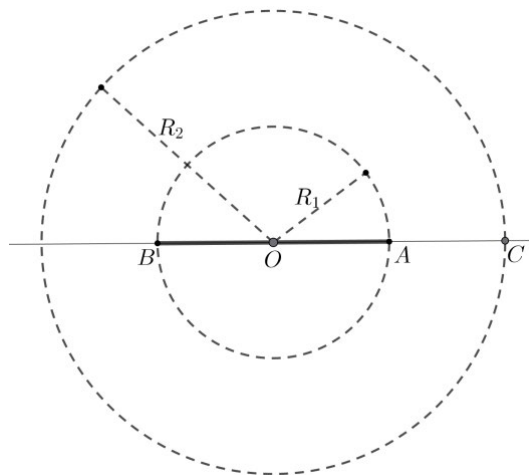
$$4) \operatorname{ctg} 3\alpha = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right).$$

Доведемо одну з цих формул.

V. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Під час святкового шоу два дрони літають по колу навколо точки O , яка є серединою сцени AB , завдовжки 100 метрів (див. рисунок). Радіус обертання першого дрона $R_1 = 50$ м, а другого — 100 м. Кутова швидкість першого дрона — 1 рад/с, а другого — 3 рад/с. Перший дрон стартує з точки A , а другий — з точки C . Уздовж сцени, перпендикулярно до неї, щільно розташовані лазерні датчики і коли обидва дрони будуть перебувати по різні боки від сцени, але на одній прямій, то запускається святковий феєрверк і починається шоу. Визначте, в який момент часу після запуску дронів почнеться святкове шоу.



Задача 2. Олімпіадна задача. Доведіть, що число $\sin 25^\circ$ є ірраціональним.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Доведіть тотожність:

1) $2\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos \alpha = 1$;

2) $2\cos^2 \alpha - \cos 2\alpha = 1$;

3) $2\cos^2(45^\circ - \alpha) - \sin 2\alpha = 1$;

4) $\sin^2\left(\frac{5\pi}{4} - 4\alpha\right) - \sin^2\left(\frac{5\pi}{4} + 4\alpha\right) = -\sin 8\alpha$.

2. Доведіть тотожність $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$.

3. Доведіть додаткові формули пониження степеня:

1) $\sin^3 \alpha = \frac{3\sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}$;

2) $\cos^3 \alpha = \frac{3\cos \alpha + \cos 3\alpha}{4}$.

4. Доведіть тотожність:

1) $2\sin(0,5\pi - \alpha)\sin \alpha = \sin 2\alpha$;

2) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = -\cos 2\alpha$;

3) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$;

4) $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$.

5. Спростіть вираз:

1) $2\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos \alpha$;

2) $2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha$;

3) $4\sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2\cos \alpha + 3$;

4) $4\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2\cos \alpha + 3$.

6. Спростіть вираз:

1) $\frac{1 + \cos 2\alpha}{\sin(\pi - 2\alpha)} \cdot \operatorname{tg} \alpha$;

2) $\frac{2 \cos^2 \alpha - 1}{\sin 2\alpha} : \operatorname{ctg} 2\alpha$.

Рівень В

1. Доведіть тотожність:

1) $1 + \cos(3\pi + 3\alpha) \cos 2\alpha - \cos(1,5\pi - 3\alpha) \sin 2\alpha = 2 \sin^2 2,5\alpha$.

2) $\operatorname{tg}^4 \alpha (8 \cos^2(\pi - \alpha) - \cos(\pi + 4\alpha) - 1) = 8 \sin^4 \alpha$.

2. Спростіть вираз:

1) $0,125 \cos 4\alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$;

2) $\sin^2 \beta \operatorname{tg} \beta - \cos^2 \beta \operatorname{ctg} \beta + 2 \operatorname{ctg} 2\beta$;

3) $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{2 \cos 2\alpha}{1 + \sin(2\alpha + 1,5\pi)}$;

4) $\frac{1}{1 - \operatorname{tg} \beta} - \frac{\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) \sin \beta}{\cos 2\beta}$.

3. Доведіть тотожність:

1) $(\sin \alpha + \sin \beta)^2 + (\cos \alpha + \cos \beta)^2 = 4 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2}$;

2) $(\sin \alpha - \sin \beta)^2 + (\cos \alpha - \cos \beta)^2 = 4 \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}$.

4. Доведіть тотожність:

1) $\cos^3 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4} \sin 4\alpha$;

2) $2 \sin 2\alpha \sin \alpha + \cos 3\alpha = \cos \alpha$;

3) $1 + 2 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha = 4 \cos^2 \alpha \cos 2\alpha$;

4) $1 + 2 \cos 3\alpha + \cos 6\alpha = 4 \cos^2 \frac{3\alpha}{2} \cos 3\alpha$.

5. Доведіть тотожність:

1) $\sin 2\alpha(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) + \cos 2\alpha(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) = 2 \cos^2(\alpha - \beta)$;

2) $\sin 2\alpha(\sin 2\alpha - \sin 2\beta) + \cos 2\alpha(\cos 2\alpha - \cos 2\beta) = 2 \sin^2(\alpha - \beta)$.

6. Спростіть вираз:

1) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}$;

2) $\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha}$;

3) $2 \sin^2\left(45^\circ + \frac{3}{2}\alpha\right) - 1$;

4) $\frac{1 - 2 \cos \frac{x}{2} + \cos x}{1 + 2 \cos \frac{x}{2} + \cos x}$.

7. Спростіть вираз:

1) $\frac{32 \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \cos 8\alpha}{\sin 16\alpha}$;

2) $\frac{\cos 3\alpha \cdot \cos 6\alpha \cdot \cos 12\alpha \cdot \cos 24\alpha}{\sin 48\alpha}$.

8. Спростіть вираз:

1) $\frac{\cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha}{\sqrt{2} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)} - \frac{1}{2} \sin 2\alpha$;

2) $\frac{\cos^3 \alpha + \sin^3 \alpha}{\sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)} + \frac{1}{2} \sin 2\alpha$.

9. Доведіть тотожність:

1) $\sin^4 \alpha = \frac{1}{8} \cos 4\alpha - \frac{1}{2} \cos 2\alpha + \frac{3}{8};$

2) $\frac{1 + \sin \alpha - 2 \sin^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}{4 \cos \frac{\alpha}{2}} = \sin \frac{\alpha}{2};$

3) $\sin^2 \alpha + \sin^2 \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha \right) + \sin^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha \right) = \frac{3}{2};$

4) $4 \sin^4 \alpha + 4 \cos^4 \alpha + \cos 4\alpha - 1 = 4 \cos^2 2\alpha.$

10. Доведіть тотожність:

1) $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2};$

2) $\frac{1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha;$

3) $\frac{\sin^2 2\alpha + 4 \sin^2 \alpha - 4}{1 - 8 \sin^2 \alpha - \cos 4\alpha} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^4 \alpha;$

4) $\frac{\cos \left(4\alpha - \frac{\pi}{2} \right) \sin \left(\frac{5\pi}{2} + 2\alpha \right)}{(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha)} = \operatorname{tg} \alpha.$

11. Спростіть вираз:

1) $\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos 2\alpha}} - \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 + \cos 2\alpha}},$ якщо $0^\circ < \alpha < 90^\circ;$

2) $\frac{\sin \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right)}{\sqrt{1 - \sin \alpha}} - \frac{\sin \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}{\sqrt{1 + \sin \alpha}},$ якщо $0^\circ < \alpha < 180^\circ.$

12. Спростіть вираз:

1) $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \cdot \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{1 + \cos \frac{\alpha}{2}};$

2) $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \cdot \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{1 + \cos \frac{\alpha}{2}}.$

Рівень С

1. Спростіть вираз:

1) $\left(\sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}} \right) \operatorname{tg} 2\alpha + 2,$ якщо $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi;$

2) $\sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}},$ якщо $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi.$

2. Доведіть тотожність:

1) $\operatorname{tg} \left(2\alpha - \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(4\alpha + \frac{\pi}{2} \right) + \cos \left(4\alpha + \frac{5\pi}{2} \right) = -1;$

2) $\frac{\operatorname{tg} \left(\frac{5\pi}{4} - \alpha \right) (1 + \sin 2\alpha)}{\cos \left(\frac{5\pi}{2} - 2\alpha \right)} = \operatorname{ctg} 2\alpha.$

3. Для гострих кутів α і β прямокутного трикутника, доведіть тотожність:

$$1) \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) - 4\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\beta - 4 + 4\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)} = \operatorname{tg}^4\left(\alpha + \frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{4}\right);$$

$$2) \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \cos(\pi + \beta)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \sin(\alpha - \pi)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 0.$$

4. Спростіть вираз:

$$1) 1 - \sin 4\alpha + \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha\right) \cdot \cos 4\alpha; \quad 2) \operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}\alpha + 1 - \frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha}.$$

5. Доведіть тотожність, користуючись додатковими формулами пониження степеня (завдання 3 рівня А):

$$1) \sin^3\alpha \cos^3\alpha = \frac{3}{32}\sin 2\alpha - \frac{1}{32}\sin 6\alpha;$$

$$2) \sin^3\alpha + \sin^3\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) + \sin^3\left(\frac{4\pi}{3} + \alpha\right) = -\frac{3}{4}\sin 3\alpha.$$

6. У трикутнику навпроти сторін a , b , c лежать кути A , B , C . Доведіть формули, де $p = \frac{a+b+c}{2}$ — півпериметр:

$$1) \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}; \quad 2) \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

7. Творче завдання. Доведіть додаткові формули кратних і половинних кутів, а також формули пониження степеня.

Рефлексія

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
- 4) Найскладнішим для мене було

- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
-
-
- 6) Найбільше мені сподобалося
-
-

Можливі теми проєктів

- 1.** Формули кратних кутів у гармонічних коливаннях.
- 2.** Формули кратних кутів у кодуванні сигналів.
- 3.** Раціоналізація тригонометричних виразів та універсальна тригонометрична підстановка.
- 4.** Фігури Лісажу та їхній зв'язок з тригонометрією.
- 5.** Моделювання обертальних рухів у техніці з використанням формул кратних кутів.

