

11

Тема 2. Співвідношення між тригонометричними функціями

Урок 11. Урок–практикум. Спрощення виразів та доведення тотожностей

Тип уроку: урок узагальнення та систематизації знань і вмінь.

План уроку

1. Спрощення та перетворення виразів.
2. Доведення тотожностей.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

оцінює достовірність і доцільність використання даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 1.2.2–1 П];

обирає серед кількох різних стратегій розв'язання специфічних проблемних ситуацій таку, що задовольняє певні умови [12 МАО 2.2.2–1 П];

обирає математичну модель розв'язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов [12 МАО 3.2.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.

6) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С.

10) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чому для опису складних звукових хвиль важливо знати формули кратних кутів?

2) Як інженери використовують формули кратних кутів при проєктуванні обертальних механізмів?

3) Як художники лазерних шоу можуть застосувати знання про синус чи косинус подвійного чи потрійного аргументу?

4) Чи можна за допомогою формул кратних кутів спростувати складні тригонометричні вирази?

5) У яких ситуаціях інженеру доцільніше застосувати формули кратних кутів аніж обчислювати значення тригонометричних виразів за допомогою таблиць або калькулятора?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Спростіть вираз $\cos^2 \alpha - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$.

Відповідь. $\cos 2\alpha$.

2. Обчисліть $\sin 3645^\circ$.

Відповідь. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Спростіть вираз $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(\pi + \alpha) + \sin \alpha + \sin(2\pi + \alpha)$.

Відповідь. 0.

4. Укажіть найменший додатний період функції $y = \cos \frac{x}{3}$.

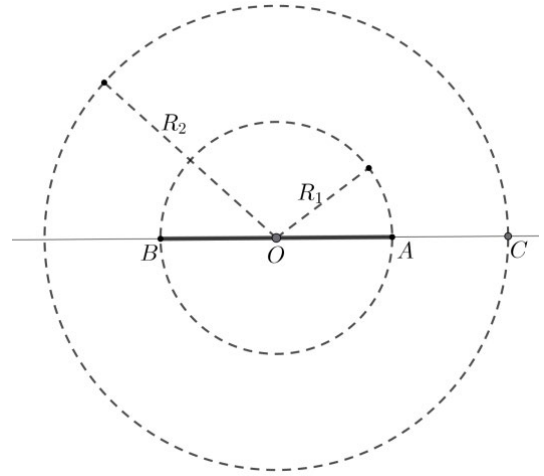
Відповідь. 6π .

5. Обчисліть $\sin \alpha$, якщо $\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} = 1,4$.

Відповідь. 0,96.

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Під час святкового шоу два дрони літають по колу навколо точки O , яка є серединою сцени AB , завдовжки 100 метрів (див. рисунок). Радіус обертання першого дрона $R_1 = 50$ м, а другого — 100 м. Кутова швидкість першого дрона — 1 рад/с, а другого — 3 рад/с. Перший дрон стартує з точки A , а другий — з точки C . Уздовж сцени, перпендикулярно до неї, щільно розташовані лазерні датчики і коли обидва дрони будуть перебувати по різні боки від сцени, але на одній прямій, то запускається святковий феєрверк і починається шоу. Визначте, в який момент часу після запуску дронів почнеться святкове шоу.



Задача 2. Олімпіадна задача. Доведіть, що число $\sin 25^\circ$ є ірраціональним.

III. Спрощення та перетворення виразів

Нагадаємо формули, які потрібні для обчислення значень тригонометричних функцій і спрощення виразів.

Формули подвійного аргументу	$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \\ \cos 2\alpha &= 1 - 2\sin^2 \alpha, \\ \cos 2\alpha &= 2\cos^2 \alpha - 1, \\ \sin 2\alpha &= 2\sin \alpha \cos \alpha, \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}. \end{aligned}$
Формули пониження степеня	$\begin{aligned} \sin^2 \alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \\ \cos^2 \alpha &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \\ \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}. \end{aligned}$

Формули половинного аргументу	$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}},$ $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}},$ $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}.$
Формули потрійного аргументу	$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha,$ $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$
Вираження тригонометричних функцій кутів через тангенс половинного кута	$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}},$ $\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}},$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$

Корисно довести також альтернативні формули потрійних кутів.

$$1) \sin 3\alpha = 4 \sin \alpha \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right);$$

$$2) \cos 3\alpha = 4 \cos \alpha \cdot \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right);$$

$$3) \operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right);$$

$$4) \operatorname{ctg} 3\alpha = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cdot \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right).$$

Доведемо одну з цих формул.

$$\begin{aligned}
& 4 \cos \alpha \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) = \\
& = 4 \cos \alpha \left(\cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha \right) \left(\cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha \right) = \\
& = 4 \cos \alpha \left(\cos^2 \frac{\pi}{3} \cos^2 \alpha - \sin^2 \frac{\pi}{3} \sin^2 \alpha \right) = 4 \cos \alpha \left(\frac{1}{4} \cos^2 \alpha - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha \right) = \\
& = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha + 3 \cos^3 \alpha = \\
& = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha = \cos 3\alpha.
\end{aligned}$$

Примітка. Запропонуйте учням/ученицям довести решту цих формул у рамках дослідницького проекту.

Ілюстративні приклади

6. Доведіть, що $\sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \frac{1}{8}$.

Розв'язання.

$$\sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \sin 10^\circ \cdot \sin(60^\circ - 10^\circ) \cdot \sin(60^\circ + 10^\circ) = \frac{1}{4} \sin(3 \cdot 10^\circ) = \frac{1}{8},$$

що й треба було довести.

7. Спростіть вираз $\sqrt{0,5 + 0,5\sqrt{0,5 + 0,5\cos\alpha}}$, якщо $0 \leq \alpha \leq \pi$.

Розв'язання. $\sqrt{0,5 + 0,5\sqrt{0,5 + 0,5\cos\alpha}} =$
 $= \sqrt{0,5 + 0,5\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}} = \sqrt{0,5 + 0,5\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \sqrt{0,5 + 0,5\left|\cos \frac{\alpha}{2}\right|}.$

Оскільки $0 \leq \alpha \leq \pi$, то $0 \leq \frac{\alpha}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ і $\left|\cos \frac{\alpha}{2}\right| = \cos \frac{\alpha}{2}$.

Тоді $\sqrt{0,5 + 0,5\left|\cos \frac{\alpha}{2}\right|} = \sqrt{0,5 + 0,5\cos \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \cos \frac{\alpha}{2}\right)} = \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{4}} = \left|\cos \frac{\alpha}{4}\right|.$

Оскільки $0 \leq \frac{\alpha}{4} \leq \frac{\pi}{4}$, то $\left|\cos \frac{\alpha}{4}\right| = \cos \frac{\alpha}{4}$.

Відповідь. $\cos \frac{\alpha}{4}$.

8. Спростіть вираз $\frac{1 + \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}}{1 - \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}}$.

Розв'язання. $\frac{1 + \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}}{1 - \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cos^2 \frac{\alpha}{4} - 2\sin \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{4}}{2\sin^2 \frac{\alpha}{4} - 2\sin \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{4}} =$

$$= \frac{2\cos \frac{\alpha}{4} \left(\cos \frac{\alpha}{4} - \sin \frac{\alpha}{4} \right)}{2\sin \frac{\alpha}{4} \left(\sin \frac{\alpha}{4} - \cos \frac{\alpha}{4} \right)} = -\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4}.$$

Відповідь. $-\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4}$.

IV. Доведення тотожностей

Нагадаємо основні способи доведення тотожностей.

- 1) Перетворити праву частину рівності так, щоб показати що вона дорівнює лівій.
- 2) Перетворити ліву частину рівності так, щоб показати що вона дорівнює правій.
- 3) Перетворювати праву і ліву частину і показати, що вони зводяться до рівних виразів.
- 4) Розглянути різницю лівої і правої частин і показати, що вона дорівнює 0.
- 5) Розглянути частку лівої і правої частини і показати, що вона дорівнює 1, але потрібно знаходити ОДЗ виразу, на який виконується ділення.

Ілюстративні приклади

- 9.** Доведіть тотожність $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2 \alpha}$.

$$\begin{aligned} \text{Доведення. } \operatorname{tg} 3\alpha &= \operatorname{tg}(2\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \\ &= \frac{(2\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha) \cdot (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) \cdot (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha - 2\operatorname{tg}^2 \alpha)} = \frac{3\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2 \alpha}, \text{ що й треба було довести.} \end{aligned}$$

- 10.** Доведіть тотожність $3 + 4\cos 4\alpha + \cos 8\alpha = 8\cos^4 2\alpha$.

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання. } 3 + 4\cos 4\alpha + \cos 8\alpha &= 3 + 4\cos 4\alpha + 2\cos^2 4\alpha - 1 = 2 + 4\cos 4\alpha + 2\cos^2 4\alpha = \\ &= 2(1 + 2\cos 4\alpha + \cos^2 4\alpha) = 2(1 + \cos 4\alpha)^2 = 2(2\cos^2 2\alpha)^2 = 2 \cdot 4\cos^4 2\alpha = 8\cos^4 2\alpha, \\ &\text{що й треба було довести.} \end{aligned}$$

- 11.** Доведіть тотожність $\frac{2\cos 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\cos 2\alpha + \sin 4\alpha} = \operatorname{tg}^2(45^\circ - \alpha)$.

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання. } \frac{2\cos 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\cos 2\alpha + \sin 4\alpha} &= \frac{2\cos 2\alpha - 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha}{2\cos 2\alpha + 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha} = \\ &= \frac{2\cos 2\alpha(1 - \sin 2\alpha)}{2\cos 2\alpha(1 + \sin 2\alpha)} = \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{1 - \cos(90^\circ - 2\alpha)}{1 + \cos(90^\circ - 2\alpha)} = \operatorname{tg}^2(45^\circ - \alpha), \\ &\text{що й треба було довести.} \end{aligned}$$

- 12.** Доведіть тотожність $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$.

$$\text{Розв'язання. } \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \text{ що й треба було довести.}$$

V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Під час святкового шоу два дрони літають по колу навколо точки O , яка є серединою сцени AB , завдовжки 100 метрів (див. рисунок). Радіус обертання першого дрона $R_1 = 50$ м, а другого — 100 м. Кутова швидкість першого дрона — 1 рад/с, а другого — 3 рад/с. Перший дрон стартує з точки A , а другий — з точки C . Уздовж сцени, перпендикулярно до неї, щільно розташовані лазерні датчики і коли обидва дрони будуть перебувати по різні боки від сцени, але на одній прямій, то запускається святковий феєрверк і починається шоу. Визначте, в який момент часу після запуску дронів почнеться святкове шоу.

Розв'язання. Уведемо прямокутну систему координат, початок якої збігається з точкою O , вісь ординат — перпендикулярна до сцени. Одиничний відрізок виберемо рівним OB (див. рисунок).

Через t хвилин абсциса першого дрона дорівнюватиме $\cos t$, а другого — $2\cos 3t$.

За умовою, шоу почнеться коли вперше ці абсциси збігаються, тобто коли $\cos t = 2\cos 3t$,

$$\cos t = 2(4\cos^3 t - 3\cos t),$$

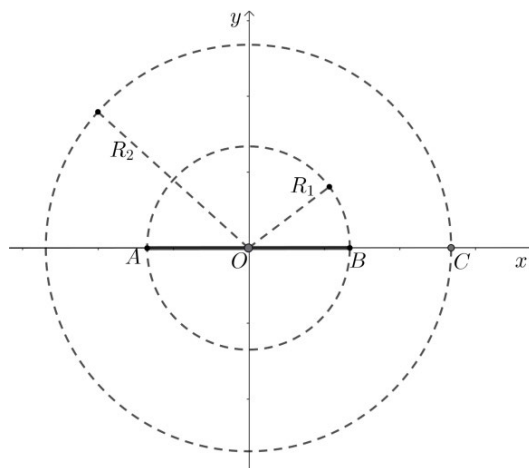
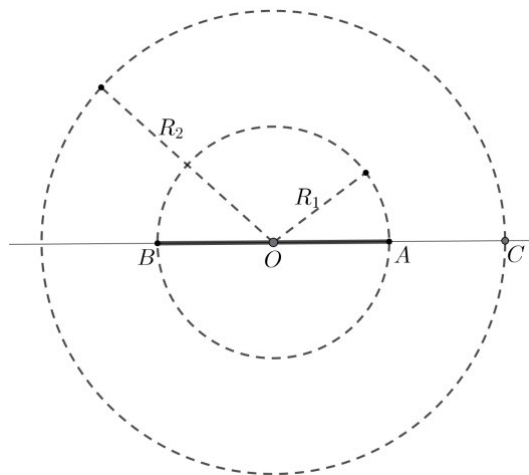
$$\cos t = 8\cos^3 t - 6\cos t,$$

$$8\cos^3 t - 7\cos t = 0, \quad \cos t(8\cos^2 t - 7) = 0,$$

$$\begin{cases} \cos t = 0, \\ \cos t = \sqrt{\frac{7}{8}}, \\ \cos t = -\sqrt{\frac{7}{8}}. \end{cases}$$

Користуючись калькулятором встановлюємо, що найменше значення t , що задовольняє умову становить $0,36$ хв ≈ 22 с, тобто шоу почнеться через 22 с.

Відповідь. Через 22 с.



Задача 2. Олімпіадна задача. Доведіть, що число $\sin 25^\circ$ є ірраціональним.

Доведення. Припустимо, що число $\sin 25^\circ$ є раціональним.

Із формули $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ випливає, що $\sin 75^\circ$ також є раціональним числом.

Однак $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$, тобто число $\sin 75^\circ$ — ірраціональне. Отже, число $\sin 25^\circ$ є ірраціональним, що й треба було довести.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (10 хв)

Рівень А

1. Доведіть тотожність:

1) $2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos \alpha = 1$;

2) $2 \cos^2 \alpha - \cos 2\alpha = 1$;

3) $2 \cos^2(45^\circ - \alpha) - \sin 2\alpha = 1$;

4) $\sin^2\left(\frac{5\pi}{4} - 4\alpha\right) - \sin^2\left(\frac{5\pi}{4} + 4\alpha\right) = -\sin 8\alpha$.

2. Доведіть тотожність $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$.

3. Доведіть додаткові формули пониження степеня:

1) $\sin^3 \alpha = \frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}$;

2) $\cos^3 \alpha = \frac{3 \cos \alpha + \cos 3\alpha}{4}$.

4. Доведіть тотожність:

1) $2 \sin(0,5\pi - \alpha) \sin \alpha = \sin 2\alpha$;

2) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = -\cos 2\alpha$;

3) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$;

4) $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$.

5. Спростіть вираз:

1) $2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos \alpha$;

2) $2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha$;

3) $4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \cos \alpha + 3$;

4) $4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \cos \alpha + 3$.

6. Спростіть вираз:

1) $\frac{1 + \cos 2\alpha}{\sin(\pi - 2\alpha)} \cdot \operatorname{tg} \alpha$;

2) $\frac{2 \cos^2 \alpha - 1}{\sin 2\alpha} : \operatorname{ctg} 2\alpha$.

Рівень В

1. Доведіть тотожність:

1) $1 + \cos(3\pi + 3\alpha) \cos 2\alpha - \cos(1,5\pi - 3\alpha) \sin 2\alpha = 2 \sin^2 2,5\alpha$.

2) $\operatorname{tg}^4 \alpha (8 \cos^2(\pi - \alpha) - \cos(\pi + 4\alpha) - 1) = 8 \sin^4 \alpha$.

2. Спростіть вираз:

1) $0,125 \cos 4\alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$;

2) $\sin^2 \beta \operatorname{tg} \beta - \cos^2 \beta \operatorname{ctg} \beta + 2 \operatorname{ctg} 2\beta$;

3) $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{2 \cos 2\alpha}{1 + \sin(2\alpha + 1,5\pi)}$;

4) $\frac{1}{1 - \operatorname{tg} \beta} - \frac{\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) \sin \beta}{\cos 2\beta}$.

3. Доведіть тотожність:

1) $(\sin \alpha + \sin \beta)^2 + (\cos \alpha + \cos \beta)^2 = 4 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2};$

2) $(\sin \alpha - \sin \beta)^2 + (\cos \alpha - \cos \beta)^2 = 4 \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}.$

4. Доведіть тотожність:

1) $\cos^3 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4} \sin 4\alpha;$ 2) $2 \sin 2\alpha \sin \alpha + \cos 3\alpha = \cos \alpha;$

3) $1 + 2 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha = 4 \cos^2 \alpha \cos 2\alpha;$ 4) $1 + 2 \cos 3\alpha + \cos 6\alpha = 4 \cos^2 \frac{3\alpha}{2} \cos 3\alpha.$

5. Доведіть тотожність:

1) $\sin 2\alpha(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) + \cos 2\alpha(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) = 2 \cos^2(\alpha - \beta);$

2) $\sin 2\alpha(\sin 2\alpha - \sin 2\beta) + \cos 2\alpha(\cos 2\alpha - \cos 2\beta) = 2 \sin^2(\alpha - \beta).$

6. Спростіть вираз:

1) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha};$

2) $\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha};$

3) $2 \sin^2 \left(45^\circ + \frac{3}{2} \alpha \right) - 1;$

4) $\frac{1 - 2 \cos \frac{x}{2} + \cos x}{1 + 2 \cos \frac{x}{2} + \cos x}.$

7. Спростіть вираз:

1) $\frac{32 \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \cos 8\alpha}{\sin 16\alpha};$

2) $\frac{\cos 3\alpha \cdot \cos 6\alpha \cdot \cos 12\alpha \cdot \cos 24\alpha}{\sin 48\alpha}.$

8. Спростіть вираз:

1) $\frac{\cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha}{\sqrt{2} \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)} - \frac{1}{2} \sin 2\alpha;$

2) $\frac{\cos^3 \alpha + \sin^3 \alpha}{\sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)} + \frac{1}{2} \sin 2\alpha.$

9. Доведіть тотожність:

1) $\sin^4 \alpha = \frac{1}{8} \cos 4\alpha - \frac{1}{2} \cos 2\alpha + \frac{3}{8};$

2) $\frac{1 + \sin \alpha - 2 \sin^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}{4 \cos \frac{\alpha}{2}} = \sin \frac{\alpha}{2};$

3) $\sin^2 \alpha + \sin^2 \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha \right) + \sin^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha \right) = \frac{3}{2};$

4) $4 \sin^4 \alpha + 4 \cos^4 \alpha + \cos 4\alpha - 1 = 4 \cos^2 2\alpha.$

10. Доведіть тотожність:

1) $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2};$

2) $\frac{1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha;$

3) $\frac{\sin^2 2\alpha + 4 \sin^2 \alpha - 4}{1 - 8 \sin^2 \alpha - \cos 4\alpha} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^4 \alpha;$

4) $\frac{\cos \left(4\alpha - \frac{\pi}{2} \right) \sin \left(\frac{5\pi}{2} + 2\alpha \right)}{(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha)} = \operatorname{tg} \alpha.$

11. Спростіть вираз:

1) $\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos 2\alpha}} - \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 + \cos 2\alpha}}$, якщо $0^\circ < \alpha < 90^\circ$;

2) $\frac{\sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{1 - \sin \alpha}} - \frac{\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{1 + \sin \alpha}}$, якщо $0^\circ < \alpha < 180^\circ$.

12. Спростіть вираз:

1) $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \cdot \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{1 + \cos \frac{\alpha}{2}}$; 2) $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \cdot \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{1 + \cos \frac{\alpha}{2}}$.

Рівень С

1. Спростіть вираз:

1) $\left(\sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}} \right) \operatorname{tg} 2\alpha + 2$, якщо $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

2) $\sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}}$, якщо $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

2. Доведіть тотожність:

1) $\operatorname{tg}\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(4\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(4\alpha + \frac{5\pi}{2}\right) = -1$;

2) $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4} - \alpha\right)(1 + \sin 2\alpha)}{\cos\left(\frac{5\pi}{2} - 2\alpha\right)} = \operatorname{ctg} 2\alpha$.

3. Для гострих кутів α і β прямокутного трикутника, доведіть тотожність:

1) $\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) - 4 \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2 \beta - 4 + 4 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)} = \operatorname{tg}^4\left(\alpha + \frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$;

2) $\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \cos(\pi + \beta)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \sin(\alpha - \pi) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 0$.

4. Спростіть вираз:

1) $1 - \sin 4\alpha + \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha\right) \cdot \cos 4\alpha$; 2) $\operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha + 1 - \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha}$.

5. Доведіть тотожність, користуючись додатковими формулами пониження степеня (завдання 3 рівня А):

1) $\sin^3 \alpha \cos^3 \alpha = \frac{3}{32} \sin 2\alpha - \frac{1}{32} \sin 6\alpha$;

2) $\sin^3 \alpha + \sin^3\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) + \sin^3\left(\frac{4\pi}{3} + \alpha\right) = -\frac{3}{4} \sin 3\alpha$.

6. У трикутнику навпроти сторін a , b , c лежать кути A , B , C . Доведіть формули, де $p = \frac{a+b+c}{2}$ — півпериметр:
- 1) $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$; 2) $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$.
7. **Творче завдання.** Доведіть додаткові формули кратних і половинних кутів, а також формули пониження степеня.

VII. Рефлексія (1–2 хв)

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
- 4) Найскладнішим для мене було
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
- 6) Найбільше мені сподобалося

Можливі теми учнівських проєктів

1. Формули кратних кутів у гармонічних коливаннях.
2. Формули кратних кутів у кодуванні сигналів.
3. Раціоналізація тригонометричних виразів та універсальна тригонометрична підстановка.
4. Фігури Лісажу та їхній зв'язок з тригонометрією.
5. Моделювання обертальних рухів у техніці з використанням формул кратних кутів.