

Тема 2.

Співвідношення між тригонометричними функціями

Урок 12. . Формули перетворення суми й різниці тригонометричних функцій у добуток

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) вивчите формули перетворення суми й різниці синусів в добуток відповідних функцій;
- 2) вивчите формули перетворення суми й різниці косинусів в добуток відповідних функцій;
- 3) дізнаєтесь формули перетворення суми й різниці тангенсів в добуток відповідних функцій;
- 4) дізнаєтесь формули перетворення суми й різниці котангенсів в добуток відповідних функцій;
- 5) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

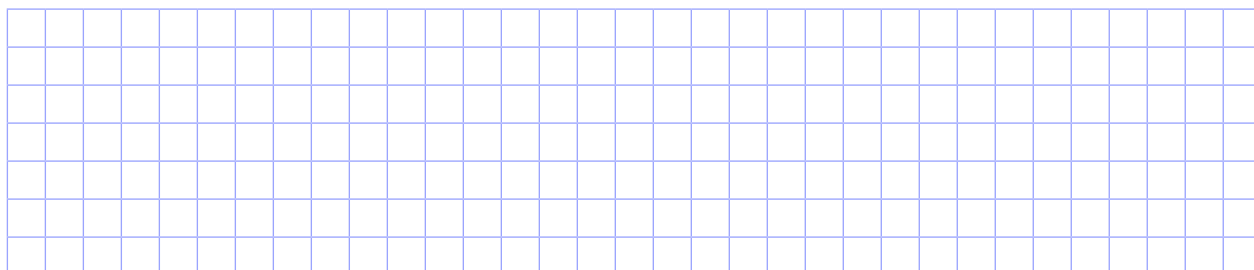
1. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x + y = a, \\ x - y = b \end{cases}$ відносно змінних x та y .
2. $\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = \dots$
3. Виразіть у радіанах кут 480° .
4. Спростіть вираз $1 - 2\cos^2 \alpha$.
5. Обчисліть добуток $\operatorname{tg} 5^\circ \cdot \operatorname{tg} 85^\circ$.

Формули суми й різниці косинусів

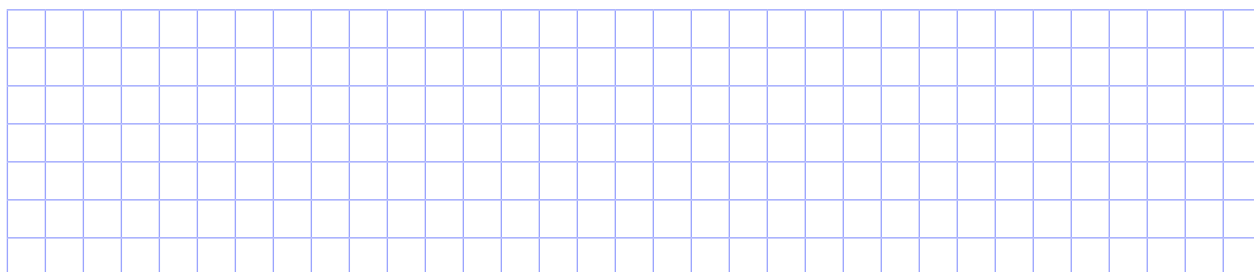
$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Приклад 3. Перетворіть різницю в добуток $\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$.



Приклад 4. Обчисліть суму $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ$.



V. Перетворення суми й різниці тангенсів в добуток відповідних функцій

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

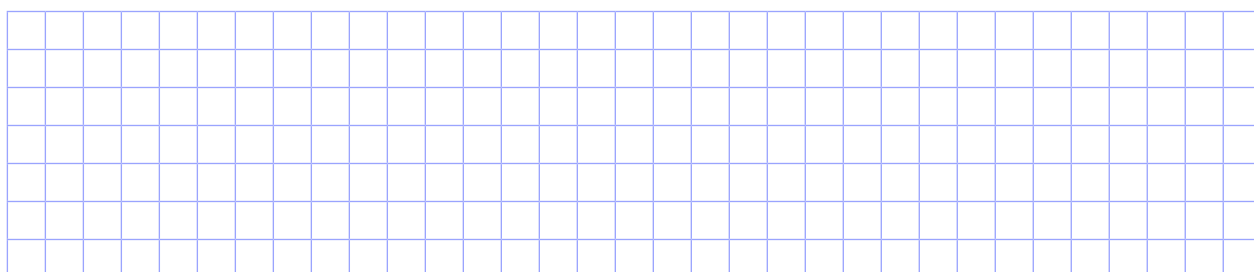
$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

Формули суми й різниці тангенсів

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta},$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

Приклад 5. Перетворіть у добуток $\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha - 1$.



VI. Перетворення суми й різниці котангенсів в добуток відповідних функцій

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Формули суми й різниці котангенсів

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Приклад 6. Спростіть вираз $\frac{1}{\operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{tg} \alpha} - \frac{1}{\operatorname{ctg} 3\alpha + \operatorname{ctg} \alpha}$.

[illegible]

VII. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Два гучномовці, які розташовані на однаковій відстані від мікрофона, випромінюють звукові хвилі з однаковою частотою та однаковою амплітудою, які можна описати функціями $y_1 = 4 \sin(100\pi t)$ і $y_2 = 4 \sin\left(100\pi t + \frac{2\pi}{3}\right)$ відповідно. Звукорежисеру потрібно змодельовати рівняння звукової хвилі, яка потраплятиме в мікрофон. Запишіть це рівняння та побудуйте в Geogebra або Desmos графіки початкових та результуючого коливальних. Масштаб одиничних відрізків на осі абсцис і осі ординат оберіть у відношенні 100 : 1.

VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Перетворіть у добуток:

- 1) $\cos 50^\circ + \cos 20^\circ$; 2) $\cos 16^\circ - \cos 36^\circ$; 3) $\sin 28^\circ + \sin 12^\circ$; 4) $\sin 5^\circ - \sin 3^\circ$;
5) $\operatorname{ctg} 24^\circ + \operatorname{ctg} 16^\circ$; 6) $\operatorname{ctg} 55^\circ - \operatorname{ctg} 15^\circ$; 7) $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{24} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{24}$; 8) $\operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{tg} 4\alpha$.

2. Доведіть тотожність:

1) $\frac{\sin \alpha + \sin 5\alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1} = 2 \sin 3\alpha$;

3) $\frac{\cos 4\alpha - \cos 8\alpha}{\sin 12\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 6\alpha}$;

2) $\frac{\cos 2\alpha + \cos 8\alpha}{\cos 3\alpha} = 2 \cos 5\alpha$;

4) $\frac{\sin 4\alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} 3\alpha} = \cos \alpha \cos 3\alpha$.

3. Спростіть вираз:

1) $\frac{(\sin 7\alpha + \sin \alpha)(\cos 7\alpha + \cos \alpha)}{1 + \cos 6\alpha}$;

3) $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}$;

5) $\frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\sin \alpha - \sin \beta}$;

2) $\left(\frac{\sin \alpha}{\sin 4\alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos 4\alpha} \right) \cdot \frac{\cos 10\alpha - \cos 6\alpha}{\sin 3\alpha}$;

4) $\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta}$;

6) $\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\sin \alpha + \sin \beta}$.

4. Розкладіть на множники вираз:

1) $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha$;

2) $\cos 2\alpha - \cos 4\alpha - \cos 6\alpha + \cos 8\alpha$.

5. Перетворіть у добуток:

1) $\sin 80^\circ + \sin 30^\circ$;

2) $\cos(3 + \alpha) - \cos(3 - \alpha)$;

3) $\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\beta}{2}$;

4) $\cos 2\alpha + \cos 5\alpha + \cos \alpha$.

6. Спростіть вираз $\frac{\sin 4\alpha - \sin 2\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha}$.

Рівень В

1. Перетворіть у добуток:

1) $\sin \left(2\alpha - \frac{\pi}{6} \right) - \sin \left(2\alpha - \frac{\pi}{3} \right)$;

3) $\cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) + \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right)$;

2) $\sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) + \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right)$;

4) $\cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) - \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right)$.

2. Перетворіть у добуток:

1) $\operatorname{tg}(x + \alpha) - \operatorname{tg}(x - \alpha)$;

3) $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg}(\alpha - 30^\circ)$;

2) $\operatorname{ctg}(45^\circ - \alpha) - \operatorname{ctg}(45^\circ + \alpha)$;

4) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$.

3. Перетворіть у добуток:

1) $\sin 25^\circ + \cos 55^\circ$;

3) $\sin \alpha + \cos \beta$;

2) $\operatorname{ctg} 22^\circ - \operatorname{tg} 66^\circ$;

4) $\operatorname{tg} 12^\circ - \operatorname{ctg} 40^\circ$.

4. Перетворіть у добуток:

1) $1 - 2 \cos \alpha$;

2) $1 + \operatorname{ctg} \alpha$;

3) $1 - \operatorname{ctg} \alpha$;

4) $1 + 2 \sin \alpha$.

5. Доведіть тотожність:

1) $\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha = 4 \cos \alpha \cos 2\alpha \sin 4\alpha$;

2) $\sin 5\alpha + \sin 6\alpha + \sin 7\alpha + \sin 8\alpha = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \sin \frac{13\alpha}{2}$.

6. Доведіть тотожність $\operatorname{tg} 6\alpha - \operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg} 6\alpha \operatorname{tg} 4\alpha \operatorname{tg} 2\alpha$.

7. Доведіть тотожність:

$$1) \operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 3\alpha; \quad 2) \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = \sin 2\alpha.$$

8. Розкладіть на множники:

$$1) \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta; \quad 2) \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta.$$

9. Перетворіть у добуток:

$$1) \sin 87^\circ - \sin 59^\circ - \sin 93^\circ + \sin 61^\circ; \quad 2) \sin 4\alpha - 2\cos^2 2\alpha + 1.$$

10. Доведіть, що $|\sin \alpha + \cos \alpha| \leq \sqrt{2}$.

11. Знайдіть $\frac{\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}$, якщо $\sin \alpha - \cos \alpha = t$.

12. Перетворіть у добуток вираз:

$$\begin{aligned} 1) & \sin 3x - \sin 4x - \sin 5x + \sin 6x; \\ 2) & \cos 4y + \cos 7y + \cos 8y + \cos 11y; \\ 3) & 3\cos x - 4\sin x + 5\cos 5x; \\ 4) & 2\cos^2\left(\frac{x}{2} + \pi\right) - \sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - 1 + 2\sin 3x. \end{aligned}$$

Рівень С

1. Доведіть тотожність:

$$\begin{aligned} 1) & \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{2} + 6x\right) + \cos(4x - 6\pi) - \cos(x + \pi)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right) + \sin(3\pi + 4x) + \sin(\pi - x)} = \operatorname{ctg} x; \\ 2) & \frac{\sin 2x + \sin 5x - \sin 3x}{1 + \cos x - 2\sin^2 2x} = 2\sin x; \\ 3) & \frac{\sin 6x - \sin 7x - \sin 8x + \sin 9x}{\cos 6x - \cos 7x - \cos 8x + \cos 9x} = \operatorname{tg} 7,5x; \\ 4) & \frac{1 + \cos 2x - \cos(4x + \pi) - \cos(6x - \pi)}{\cos(2(\pi - x)) + 2\cos^2(2x + \pi) - 1} = 4\cos^2 x - 2. \end{aligned}$$

2. Спростіть вираз:

$$\begin{aligned} 1) & \sin^2(3x + 4y) - \sin^2(4x + 3y) - \sin 7(y + x)\sin(y - x); \\ 2) & \operatorname{ctg}(45^\circ - x) + \operatorname{ctg}(135^\circ - x); \\ 3) & \frac{\sin(2x + 5y) + \sin(2x - 5y) + \sin 2x}{\cos(2x + 5y) + \cos(2x - 5y) + \cos 2x}; \\ 4) & \frac{\sin 3x + \sin 2x - \sin x}{\sin 3x - \sin 2x - \sin x}. \end{aligned}$$

3. Спростіть вираз:

$$1) \cos^2\left(\alpha - \frac{5\pi}{8}\right) - \sin^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{8}\right); \quad 2) \sin^2\left(\beta + \frac{5\pi}{12}\right) - \cos^2\left(\beta + \frac{7\pi}{12}\right).$$

4. Доведіть, що $\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{8 \cos 20^\circ}{\sqrt{3}}$.
5. Обчисліть значення виразу $\frac{\cos 11\alpha + 3 \cos 9\alpha + 3 \cos 7\alpha + \cos 5\alpha}{\cos 8\alpha}$, якщо $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.
6. Перевірте правильність рівності
 $0,5 \sin 40^\circ - \cos 30^\circ + \cos 20^\circ \cos 10^\circ = 2\sqrt{3} \sin^2 20^\circ \cos 20^\circ$.
7. **Творче завдання.** Створіть в Geogebra або Desmos ілюстрації, які наочно інтерпретують формули суми та різниці тригонометричних функцій.

Рефлексія

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
- 4) Найскладнішим для мене було
- 5) Тепер я впевнений/впевнена у своїй здатності
- 6) Мені потрібно прикласти більше зусиль до
- 7) Найбільше мені сподобалося

Можливі теми проєктів

1. Сума гармонічних коливань та її графічне зображення.
2. Явище резонансу та його зв'язок із формулами суми тригонометричних функцій.
3. Формули суми та різниці тригонометричних функцій у звукових коливаннях.
4. Обчислення значень тригонометричних функцій за допомогою логарифмічної лінійки та логарифмічних таблиць.
5. Математичне моделювання рухів за допомогою формул суми й різниці тригонометричних функцій.







