

11

Тема 2. Співвідношення між тригонометричними функціями

Урок 12. . Формули перетворення суми й різниці тригонометричних функцій у добуток

Тип уроку: урок засвоєння нових знань.

План уроку

1. Перетворення суми й різниці синусів в добуток відповідних функцій.
2. Перетворення суми й різниці косинусів в добуток відповідних функцій.
3. Перетворення суми й різниці тангенсів в добуток відповідних функцій.
4. Перетворення суми й різниці котангенсів в добуток відповідних функцій.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

визначає типи можливих результатів розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 1.3.1–1 П];

виявляє ініціативу, пропонує та обґрунтовує ідеї щодо способу розв'язання специфічних проблемних ситуацій [12 МАО 2.2.1–1 П];

обирає математичну модель розв'язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов [12 МАО 3.2.2–1 П];

реалізовує визначену послідовність дій для розв'язання специфічних проблемних ситуацій, перевіряє та досліджує отримані результати [12 МАО 4.2.1–2 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого. Завдання можна розв'язувати усно.
- 3) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.

- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні задачі. Обирайте ілюстративні задачі на власний розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.
- 6) Пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач і навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 7) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.
- 8) Можливі теми для створення проєктів запропоновані.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Чи допомагає розкладання багаточленів або виразів на множники при розв'язуванні рівнянь?
- 2) Яке коливання можна отримати при накладанні двох коливань з однаковою амплітудою?
- 3) Чи допомагає перетворення тригонометричних виразів у виконанні обчислень та при розв'язуванні рівнянь?
- 4) Чи хотіли б ви дізнатися, як із двох тригонометричних функцій отримати одну?
- 5) Чи допомагає знання формул тригонометрії обрати певний спосіб для спрощення виразів?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x + y = a, \\ x - y = b \end{cases}$ відносно змінних x та y .

Відповідь. $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{a-b}{2}\right)$.

2. $\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = \dots$

Відповідь. $-\sin x$.

3. Виразіть у радіанах кут 480° .

Відповідь. $\frac{8\pi}{3}$.

4. Спростіть вираз $1 - 2\cos^2 \alpha$.

Відповідь. $-\cos 2\alpha$.

5. Обчисліть добуток $\operatorname{tg} 5^\circ \cdot \operatorname{tg} 85^\circ$.

Відповідь. 1.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Два гучномовці, які розташовані на однаковій відстані від мікрофона, випромінюють звукові хвилі з однаковою частотою та однаковою амплітудою, які можна описати функціями $y_1 = 4 \sin(100\pi t)$ і $y_2 = 4 \sin\left(100\pi t + \frac{2\pi}{3}\right)$ відповідно. Звукорежисеру потрібно змодельовати рівняння звукової хвилі, яка потраплятиме в мікрофон. Запишіть це рівняння та побудуйте в Geogebra або Desmos графіки початкових та результуючого коливань. Масштаб одиничних відрізків на осі абсцис і осі ординат оберіть у відношенні 100 : 1.

III. Перетворення суми й різниці синусів в добуток відповідних функцій

Запишемо формули додавання для синуса:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y.$$

Додамо та віднімемо почленно ліві і праві частини цих рівностей, отримаємо:

$$\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2 \sin x \cos y \text{ та } \sin(x + y) - \sin(x - y) = 2 \sin y \cos x.$$

Нехай $x + y = \alpha$, $x - y = \beta$, тоді $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$ і $y = \frac{\alpha - \beta}{2}$.

Звідси $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$,

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Формули суми та різниці синусів:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Ілюстративні приклади (5 хв)

- 6.** Перетворіть різницю у добуток: $\sin(60^\circ + \alpha) - \sin(60^\circ - \alpha)$.

$$\text{Розв'язання. } \sin(60^\circ + \alpha) - \sin(60^\circ - \alpha) = 2 \sin \frac{60^\circ + \alpha - 60^\circ + \alpha}{2} \cos \frac{60^\circ + \alpha + 60^\circ - \alpha}{2} =$$

$$= 2 \sin \alpha \cos 60^\circ = 2 \sin \alpha \cdot \frac{1}{2} = \sin \alpha.$$

Відповідь. $\sin \alpha$.

- 7.** Обчисліть: $\sin \frac{7\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12}$.

$$\text{Розв'язання. } \sin \frac{7\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} = 2 \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Відповідь. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

8. Перетворіть у добуток суму $\sin \alpha + \cos \alpha$.

Розв'язання. $\sin \alpha + \cos \alpha = \sin \alpha + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = 2 \sin \frac{\alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha}{2} \cos \frac{\alpha - \frac{\pi}{2} + \alpha}{2} =$
 $= 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right).$

Відповідь. $\sqrt{2} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right).$

IV. Перетворення суми й різниці косинусів в добуток відповідних функцій

Запишемо формули додавання для косинуса:

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

Додамо та віднімемо почленно ліві і праві частини цих рівностей, отримаємо:

$$\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2 \cos x \cos y \text{ та } \cos(x + y) - \cos(x - y) = -2 \sin x \sin y.$$

Нехай $x + y = \alpha$, $x - y = \beta$, тоді $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$ і $y = \frac{\alpha - \beta}{2}$.

Тоді $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ та $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$.

Формули суми й різниці косинусів

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Ілюстративні приклади

9. Перетворіть різницю в добуток $\cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{3} \right) - \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right)$.

Розв'язання. $\cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{3} \right) - \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) = -2 \sin \frac{\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{3} - \alpha - \frac{\pi}{6}}{2} \cdot \sin \frac{\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{3} + \alpha + \frac{\pi}{6}}{2} =$
 $= -2 \sin \frac{\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}}{2} \cdot \sin \frac{\frac{3\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}}{2} = -2 \sin \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\alpha}{4} \right) \cdot \sin \left(\frac{3\alpha}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = 2 \sin \left(\frac{\alpha}{4} - \frac{\pi}{12} \right) \cdot \sin \left(\frac{3\alpha}{4} + \frac{\pi}{4} \right).$

Відповідь. $2 \sin \left(\frac{\alpha}{4} - \frac{\pi}{12} \right) \cdot \sin \left(\frac{3\alpha}{4} + \frac{\pi}{4} \right).$

10. Обчисліть суму $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ$.

Розв'язання. $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ = 2 \cos 45^\circ \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$

Відповідь. $\frac{\sqrt{6}}{2}.$

11. Перетворіть у добуток вираз $1 + \sin \alpha + \cos \alpha$.

Розв'язання. $1 + \cos \alpha + \sin \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \right) =$

$$= 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \right) = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \cos \frac{\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}}{2} \cos \frac{\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}}{2} =$$

$$= 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\pi}{4} \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = 2\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right).$$

Відповідь. $2\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right).$

V. Перетворення суми й різниці тангенсів в добуток відповідних функцій

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

Формули суми й різниці тангенсів

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta},$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

Ілюстративний приклад

12. Перетворіть у добуток $\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha - 1$.

Розв'язання. $\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha - 1 = \sqrt{3} \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \sqrt{3} \left(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3} \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{6} \right)}{\cos \alpha \cos \frac{\pi}{6}} =$

$$= \frac{\sqrt{3} \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{6} \right)}{\cos \alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2 \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{6} \right)}{\cos \alpha}.$$

Відповідь. $\frac{2 \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{6} \right)}{\cos \alpha}.$

VI. Перетворення суми й різниці котангенсів в добуток відповідних функцій

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Формули суми й різниці котангенсів

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Ілюстративний приклад

- 13.** Спростіть вираз $\frac{1}{\operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{tg} \alpha} - \frac{1}{\operatorname{ctg} 3\alpha + \operatorname{ctg} \alpha}$.

Розв'язання.

$$\frac{1}{\operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{tg} \alpha} - \frac{1}{\operatorname{ctg} 3\alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\cos \alpha \cos 3\alpha}{\sin 4\alpha} - \frac{\sin \alpha \sin 3\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{\cos(\alpha + 3\alpha)}{\sin 4\alpha} = \frac{\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha} = \operatorname{ctg} 4\alpha.$$

Відповідь. $\operatorname{ctg} 4\alpha$.

- 14.** Доведіть тотожність $\operatorname{ctg} 6\alpha - \operatorname{ctg} 4\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha = -\operatorname{ctg} 6\alpha \operatorname{ctg} 4\alpha \operatorname{tg} 2\alpha$.

Доведення.

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} 6\alpha - \operatorname{ctg} 4\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{-\sin 2\alpha}{\sin 6\alpha \sin 4\alpha} + \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \sin 2\alpha \left(\frac{-1}{\sin 6\alpha \sin 4\alpha} + \frac{1}{\cos 2\alpha} \right) = \\ &= \frac{\sin 2\alpha (-\cos 2\alpha + \sin 6\alpha \sin 4\alpha)}{\sin 6\alpha \sin 4\alpha \cos 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha (-\cos(6\alpha - 4\alpha) + \sin 6\alpha \sin 4\alpha)}{\sin 6\alpha \sin 4\alpha \cos 2\alpha} = \\ &= \frac{\sin 2\alpha (-\cos 6\alpha \cos 4\alpha - \sin 6\alpha \sin 4\alpha + \sin 6\alpha \sin 4\alpha)}{\sin 6\alpha \sin 4\alpha \cos 2\alpha} = \\ &= \frac{-\sin 2\alpha \cos 6\alpha \cos 4\alpha}{\sin 6\alpha \sin 4\alpha \cos 2\alpha} = -\operatorname{Atg} 6\alpha \operatorname{Atg} 4\alpha \operatorname{tg} 2\alpha, \text{ що й треба було довести.} \end{aligned}$$

VII. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Два гучномовці, які розташовані на однаковій відстані від мікрофона, випромінюють звукові хвилі з однаковою частотою та однаковою амплітудою, які можна описати функціями $y_1 = 4 \sin(100\pi t)$ і $y_2 = 4 \sin\left(100\pi t + \frac{2\pi}{3}\right)$ відповідно. Звукорежисеру потрібно змодельовати рівняння звукової хвилі, яка потраплятиме в мікрофон. Запишіть це рівняння та побудуйте в Geogebra або Desmos графіки початкових та результуючого коливань. Масштаб одиничних відрізків на осі абсцис і осі ординат оберіть у відношенні 100 : 1.

Розв'язання. Знайдемо суму функцій: $y = y_1 + y_2 = 4 \sin(100\pi t) + 4 \sin\left(100\pi t + \frac{2\pi}{3}\right) =$

$$= 4 \cdot 2 \cdot \sin \frac{100\pi t + 100\pi t + \frac{2\pi}{3}}{2} \cdot \cos \frac{100\pi t - 100\pi t - \frac{2\pi}{3}}{2} = 8 \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= 4 \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Відповідь. $y = 4 \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right).$

VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Перетворіть у добуток:

- 1) $\cos 50^\circ + \cos 20^\circ$; 2) $\cos 16^\circ - \cos 36^\circ$; 3) $\sin 28^\circ + \sin 12^\circ$; 4) $\sin 5^\circ - \sin 3^\circ$;
 5) $\operatorname{ctg} 24^\circ + \operatorname{ctg} 16^\circ$; 6) $\operatorname{ctg} 55^\circ - \operatorname{ctg} 15^\circ$; 7) $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{24} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{24}$; 8) $\operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{tg} 4\alpha$.

2. Доведіть тотожність:

- 1) $\frac{\sin \alpha + \sin 5\alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1} = 2 \sin 3\alpha$; 2) $\frac{\cos 2\alpha + \cos 8\alpha}{\cos 3\alpha} = 2 \cos 5\alpha$;
 3) $\frac{\cos 4\alpha - \cos 8\alpha}{\sin 12\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 6\alpha}$; 4) $\frac{\sin 4\alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} 3\alpha} = \cos \alpha \cos 3\alpha$.

3. Спростіть вираз:

- 1) $\frac{(\sin 7\alpha + \sin \alpha)(\cos 7\alpha + \cos \alpha)}{1 + \cos 6\alpha}$; 2) $\left(\frac{\sin \alpha}{\sin 4\alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos 4\alpha}\right) \cdot \frac{\cos 10\alpha - \cos 6\alpha}{\sin 3\alpha}$;
 3) $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}$; 4) $\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta}$;
 5) $\frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\sin \alpha - \sin \beta}$; 6) $\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\sin \alpha + \sin \beta}$.

4. Розкладіть на множники вираз:

- 1) $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha$; 2) $\cos 2\alpha - \cos 4\alpha - \cos 6\alpha + \cos 8\alpha$.

5. Перетворіть у добуток:

- 1) $\sin 80^\circ + \sin 30^\circ$; 2) $\cos(3 + \alpha) - \cos(3 - \alpha)$;
 3) $\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\beta}{2}$; 4) $\cos 2\alpha + \cos 5\alpha + \cos \alpha$.

6. Спростіть вираз $\frac{\sin 4\alpha - \sin 2\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha}$.

Рівень В

1. Перетворіть у добуток:

1) $\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right);$

2) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right);$

3) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right);$

4) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right).$

2. Перетворіть у добуток:

1) $\operatorname{tg}(x + \alpha) - \operatorname{tg}(x - \alpha);$

2) $\operatorname{ctg}(45^\circ - \alpha) - \operatorname{ctg}(45^\circ + \alpha);$

3) $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg}(\alpha - 30^\circ);$

4) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg}(\alpha - \beta).$

3. Перетворіть у добуток:

1) $\sin 25^\circ + \cos 55^\circ;$

2) $\operatorname{ctg} 22^\circ - \operatorname{tg} 66^\circ;$

3) $\sin \alpha + \cos \beta;$

4) $\operatorname{tg} 12^\circ - \operatorname{ctg} 40^\circ.$

4. Перетворіть у добуток:

1) $1 - 2\cos \alpha;$

2) $1 + \operatorname{ctg} \alpha;$

3) $1 - \operatorname{ctg} \alpha;$

4) $1 + 2\sin \alpha.$

5. Доведіть тотожність:

1) $\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha = 4 \cos \alpha \cos 2\alpha \sin 4\alpha;$

2) $\sin 5\alpha + \sin 6\alpha + \sin 7\alpha + \sin 8\alpha = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \sin \frac{13\alpha}{2}.$

6. Доведіть тотожність $\operatorname{tg} 6\alpha - \operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg} 6\alpha \operatorname{tg} 4\alpha \operatorname{tg} 2\alpha.$

7. Доведіть тотожність:

1) $\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 3\alpha;$

2) $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = \sin 2\alpha.$

8. Розкладіть на множники:

1) $\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta;$

2) $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta.$

9. Перетворіть у добуток:

1) $\sin 87^\circ - \sin 59^\circ - \sin 93^\circ + \sin 61^\circ;$

2) $\sin 4\alpha - 2\cos^2 2\alpha + 1.$

10. Доведіть, що $|\sin \alpha + \cos \alpha| \leq \sqrt{2}.$

11. Знайдіть $\frac{\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)},$ якщо $\sin \alpha - \cos \alpha = t.$

12. Перетворіть у добуток вираз:

1) $\sin 3x - \sin 4x - \sin 5x + \sin 6x;$

2) $\cos 4y + \cos 7y + \cos 8y + \cos 11y;$

3) $3\cos x - 4\sin x + 5\cos 5x;$

4) $2\cos^2\left(\frac{x}{2} + \pi\right) - \sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - 1 + 2\sin 3x.$

Рівень С

1. Доведіть тотожність:

- 1)
$$\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{2} + 6x\right) + \cos(4x - 6\pi) - \cos(x + \pi)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right) + \sin(3\pi + 4x) + \sin(\pi - x)} = \operatorname{ctg} x;$$
- 2)
$$\frac{\sin 2x + \sin 5x - \sin 3x}{1 + \cos x - 2\sin^2 2x} = 2\sin x;$$
- 3)
$$\frac{\sin 6x - \sin 7x - \sin 8x + \sin 9x}{\cos 6x - \cos 7x - \cos 8x + \cos 9x} = \operatorname{tg} 7,5x;$$
- 4)
$$\frac{1 + \cos 2x - \cos(4x + \pi) - \cos(6x - \pi)}{\cos(2(\pi - x)) + 2\cos^2(2x + \pi) - 1} = 4\cos^2 x - 2.$$

2. Спростіть вираз:

- 1) $\sin^2(3x + 4y) - \sin^2(4x + 3y) - \sin 7(y + x)\sin(y - x);$
- 2) $\operatorname{ctg}(45^\circ - x) + \operatorname{ctg}(135^\circ - x);$
- 3)
$$\frac{\sin(2x + 5y) + \sin(2x - 5y) + \sin 2x}{\cos(2x + 5y) + \cos(2x - 5y) + \cos 2x};$$
- 4)
$$\frac{\sin 3x + \sin 2x - \sin x}{\sin 3x - \sin 2x - \sin x}.$$

3. Спростіть вираз:

- 1) $\cos^2\left(\alpha - \frac{5\pi}{8}\right) - \sin^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{8}\right);$
- 2) $\sin^2\left(\beta + \frac{5\pi}{12}\right) - \cos^2\left(\beta + \frac{7\pi}{12}\right).$

4. Доведіть, що $\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{8\cos 20^\circ}{\sqrt{3}}.$

5. Обчисліть значення виразу $\frac{\cos 11\alpha + 3\cos 9\alpha + 3\cos 7\alpha + \cos 5\alpha}{\cos 8\alpha}$, якщо $\cos \alpha = \frac{1}{3}.$

6. Перевірте правильність рівності

$$0,5\sin 40^\circ - \cos 30^\circ + \cos 20^\circ \cos 10^\circ = 2\sqrt{3}\sin^2 20^\circ \cos 20^\circ.$$

7. Творче завдання. Створіть в Geogebra або Desmos ілюстрації, які наочно інтерпретують формули суми та різниці тригонометричних функцій.

ІХ. Рефлексія (1–2 хв)

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію

- 4) Найскладнішим для мене було
-
-
- 5) Тепер я впевнений/впевнена у своїй здатності
-
-
- 6) Мені потрібно прикласти більше зусиль до
-
-
- 7) Найбільше мені сподобалося
-
-

Можливі теми проєктів

- 1.** Сума гармонічних коливань та її графічне зображення.
- 2.** Явище резонансу та його зв'язок із формулами суми тригонометричних функцій.
- 3.** Формули суми та різниці тригонометричних функцій у звукових коливаннях.
- 4.** Обчислення значень тригонометричних функцій за допомогою логарифмічної лінійки та логарифмічних таблиць.
- 5.** Математичне моделювання рухів за допомогою формул суми й різниці тригонометричних функцій.