

11

Тема 2. Співвідношення між тригонометричними функціями

Урок 13. Урок–практикум. Застосування формул перетворення суми й різниці тригонометричних функцій у добуток

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

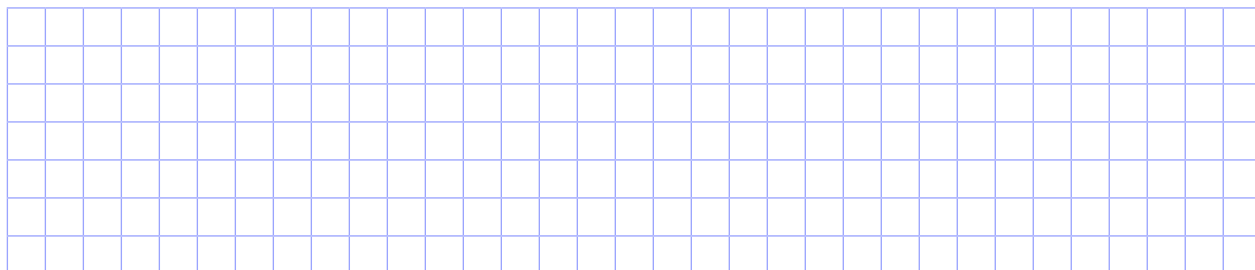
На уроці ви навчитеся:

- 1) застосовувати формули суми й різниці тригонометричних функцій для перетворення і спрощення виразів;
- 2) застосовувати формули суми й різниці тригонометричних функцій для доведення тотожностей;
- 3) використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Обчисліть: $\frac{\operatorname{tg} 15^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ}{1 + \operatorname{tg} 15^\circ \operatorname{tg} 60^\circ}$.
2. Обчисліть: $\sin^2 \frac{\pi}{8} - \cos^2 \frac{\pi}{8}$.
3. Спростіть вираз $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$.
4. Спростіть вираз $\frac{\sin 26^\circ}{\sin 13^\circ}$.
5. Спростіть вираз $\sin 3\alpha + \sin \alpha$.

Приклад 4. Обчисліть: $\frac{3(\cos 20^\circ - \sin 20^\circ)}{\sqrt{2} \sin 25^\circ}$.

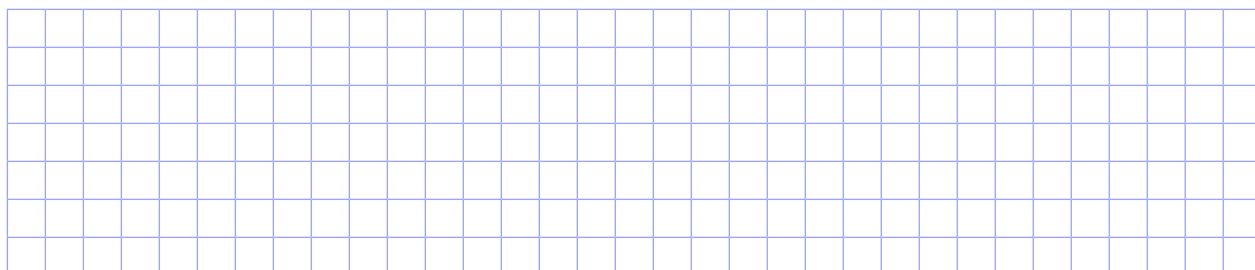


IV. Доведення тотожностей

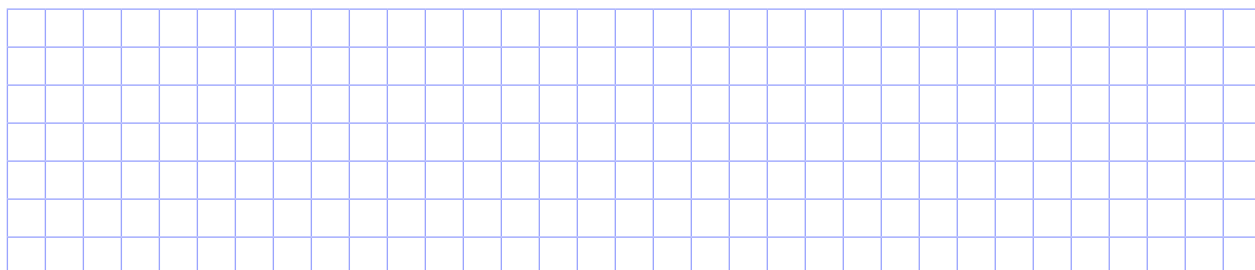
Нагадаємо основні способи доведення тотожностей:

- 1) перетворити праву частину рівності так, щоб довести, що вона дорівнює лівій;
- 2) перетворити ліву частину рівності так, щоб довести, що вона дорівнює правій;
- 3) перетворити праву й ліву частини рівностей й звести їх до рівних виразів;
- 4) обчислити різницю лівої й правої частин рівності, яка має дорівнювати 0;
- 5) знайти частку лівої й правої частин рівності, яка має дорівнювати одиниці, при цьому потрібно вилучати значення змінних, при яких вираз, на який виконується ділення, перетворюється в 0.

Приклад 5. Доведіть тотожність $\frac{\cos 3\alpha + \cos \alpha}{\sin 3\alpha - \sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$.



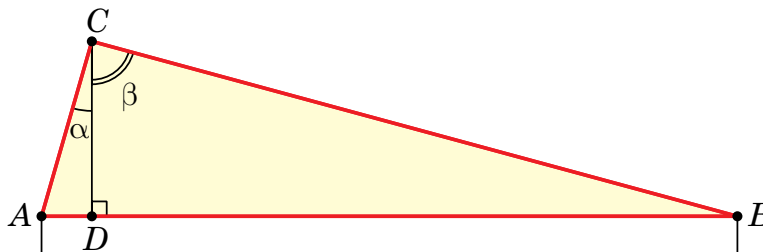
Приклад 6. Доведіть тотожність $\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha - \beta) = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$.



V. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Будівельники планують установити двосхилий дах на будинок, довжина якого $AB = 16$ м (див. рисунок). Дах має бути з різними кутами нахилу схилів, оскільки на південний схил CB планується установка сонячних панелей. Відомо, що кут α між основною опорою CD (при цьому $CD \perp AB$) та північним схилом CA має дорівнювати 15° , а кут β між CD та південним схилом CB має дорівнювати 75° . Розрахуйте висоту опори CD .



Задача 2. Олімпіадна задача. Обчисліть суму

$$\frac{1}{\cos 1 \cos 2} + \frac{1}{\cos 2 \cos 3} + \dots + \frac{1}{\cos(n-1) \cos n}, \text{ де } n > 1.$$

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Запишіть у вигляді добутку:

- 1) $\cos 40^\circ + \cos 50^\circ$; 2) $\sin \frac{\pi}{7} + \cos \frac{\pi}{5}$; 3) $\cos 18^\circ - \cos 10^\circ$; 4) $\cos 4^\circ - \cos 28^\circ$;
5) $\sin 26^\circ + \sin 14^\circ$; 6) $\sin 1^\circ + \cos 64^\circ$; 7) $\sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{12}$; 8) $\cos \frac{\pi}{8} - \cos \frac{\pi}{18}$.

2. Розкладіть на множники:

- 1) $\sin 4\alpha + \sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha - \cos 6\alpha$;
3) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} 3\alpha$; 4) $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$;
5) $\sin(60^\circ + \alpha) - \sin(60^\circ - \alpha)$; 6) $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$.

3. Доведіть тотожність:

- 1) $\cos 3\alpha \cdot \cos 9\alpha - \cos 12\alpha = \sin 3\alpha \cdot \sin 9\alpha$;
2) $\frac{\sin \alpha + \sin 9\alpha}{\cos \alpha + \cos 9\alpha} = \operatorname{tg} 5\alpha$.

4. Доведіть тотожність:

- 1) $\frac{\sin 56^\circ + \sin 34^\circ}{\sin 56^\circ - \sin 34^\circ} = \operatorname{ctg} 11^\circ$; 2) $\frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\sin \alpha + \sin \beta} = \operatorname{tg} \frac{\beta - \alpha}{2}$.

5. Перетворіть у добуток:

- 1) $1 + 2\cos \alpha$; 2) $1 - 2\cos \alpha$; 3) $\sqrt{3} + 2\cos \alpha$; 4) $\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 1$.

6. Доведіть тотожність:

1) $\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha = 4 \cos \alpha \cos 2\alpha \sin 4\alpha$;

2) $\frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$.

Рівень В

1. Перетворіть у добуток:

1) $\cos \beta - \sin \alpha$;

2) $\sin \alpha + \cos \alpha$;

3) $\sin \alpha - \cos \alpha$;

4) $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$;

5) $\sin^2 5\alpha - \sin^2 3\alpha$;

6) $\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta$.

2. Спростіть вираз:

1) $\sin 3\alpha + \sin 6\alpha + \sin 9\alpha$;

2) $\frac{\cos 5\alpha + \cos 6\alpha + \cos 7\alpha}{\sin 5\alpha + \sin 6\alpha + \sin 7\alpha}$.

3. Обчисліть:

1) $\frac{\sin 43^\circ + \sin 17^\circ}{2 \cos 13^\circ + 3 \sin 77^\circ}$;

2) $\frac{\cos 6^\circ + \cos 12^\circ + \cos 36^\circ + \cos 42^\circ}{\sin 87^\circ \cdot \cos 15^\circ \cdot \cos 24^\circ}$.

4. Перетворіть у добуток:

1) $\sin 12^\circ + \sin 28^\circ + \sin 40^\circ$;

2) $\cos 22^\circ + \cos 24^\circ + \cos 26^\circ + \cos 28^\circ$;

3) $\sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{3\pi}{10}$;

4) $\cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{6}$.

5. Доведіть тотожність:

1) $(\sin \alpha + \sin \beta)^2 + (\cos \alpha + \cos \beta)^2 = 4 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2}$;

2) $(\sin \alpha - \sin \beta)^2 + (\cos \alpha - \cos \beta)^2 = 4 \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}$;

3) $\sin x + \sin y + \sin(x + y) = 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \sin \frac{x + y}{2}$;

4) $\sin x + \sin y - \sin(x + y) = 4 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{x + y}{2}$.

6. Доведіть тотожність:

1) $\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha)$;

2) $\frac{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} = \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) \cdot \operatorname{tg} \beta$;

3) $\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha)$;

4) $\frac{\operatorname{ctg} \alpha + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - 1} = \operatorname{ctg}(45^\circ - \alpha)$.

7. Доведіть тотожність:

1) $\frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha} = \operatorname{tg} 4\alpha$;

2) $\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha}{\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg} 2,5\alpha$.

8. Розкладіть на множники:

1) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta$;

2) $\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \beta$;

3) $\operatorname{tg}^2 15^\circ - \operatorname{ctg}^2 x$;

4) $\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 y$.

9. Доведіть тотожність:

1) $\sin 50^\circ + \sin 10^\circ - \cos 20^\circ = 0$;

2) $\cos 48^\circ + \sin 18^\circ - \cos 12^\circ = 0$.

10. Доведіть тотожність:

1) $\sqrt{1 + \sin \alpha} + \sqrt{1 - \sin \alpha} = 2 \cos \frac{\alpha}{2}$, якщо $0^\circ < \alpha < 90^\circ$;

2) $\sqrt{1 + \sin \alpha} - \sqrt{1 - \sin \alpha} = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$, якщо $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

11. Доведіть тотожність:

1) $\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 3\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$;

2) $\operatorname{tg} \alpha + 2\operatorname{tg} 2\alpha + 4\operatorname{tg} 4\alpha + 8\operatorname{tg} 8\alpha + 16\operatorname{ctg} 16\alpha = \operatorname{ctg} \alpha$.

12. Доведіть тотожність:

1) $\frac{1}{\operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{tg} \alpha} - \frac{1}{\operatorname{ctg} 3\alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \operatorname{ctg} 4\alpha$;

2) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{8\cos^2 2\alpha}{\sin 6\alpha}$.

Рівень С

1. Обчисліть:

1) $(\operatorname{tg} 14^\circ + \operatorname{ctg} 28^\circ) \cdot \cos 14^\circ \cdot \sin 14^\circ$;

2) $\frac{\sin^2 \frac{\pi}{5} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{5}}{1 - \cos^4 \frac{2\pi}{5} - \cos^2 \frac{2\pi}{5} \cdot \sin^2 \frac{2\pi}{5}}$.

2. Доведіть тотожність:

1) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{16} + \operatorname{tg} \frac{3\pi}{16} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{16} \operatorname{tg} \frac{3\pi}{16} = 1$;

2) $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{8} - \operatorname{tg} \frac{5\pi}{8} - \operatorname{tg} \frac{7\pi}{8} \operatorname{tg} \frac{5\pi}{8} = 1$.

3. Доведіть тотожність, якщо $\alpha + \beta + \gamma = \pi$:

1) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$;

2) $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$.

4. Обчисліть:

1) $\sin 5\alpha - \sin 3\alpha$, якщо $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$;

2) $\cos 3\alpha - \cos 5\alpha$, якщо $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

5. Доведіть, що $\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{6} - \alpha \right) - \sin \frac{\pi}{12} \cos \left(\frac{\pi}{12} + 2\alpha \right) = \sin 2\alpha$.

6. Перевірте правильність рівності

$$0,5 \sin 40^\circ - \cos 30^\circ + \cos 20^\circ \cos 10^\circ = 2\sqrt{3} \sin^2 20^\circ \cos 20^\circ.$$

7. Творче завдання. Створіть візуалізацію геометричної інтерпретації формул суми й різниці тригонометричних функцій.

Рефлексія. «Плюс-Мінус-Цікавинка»

(+) що було зрозумілим:

.....

(-) що залишилося незрозумілим:

.....

(?) що здивувало або зацікавило:

.....

Можливі теми проєктів

- 1.** Створення мнемонічних правил для запам'ятовування формул суми й різниці тригонометричних функцій.
- 2.** Геометричне обґрунтування формул суми й різниці тригонометричних функцій.
- 3.** Використання формул тригонометрії для спрощення виразів та обчислень.
- 4.** Вплив похибок та наближених обчислень на точність обчислень при використанні формул суми й різниці тригонометричних функцій.
- 5.** Роль формул суми й різниці тригонометричних функцій у перетвореннях Фур'є.

