

11

Тема 2. Співвідношення між тригонометричними функціями

Урок 13. Урок–практикум. Застосування формул перетворення суми й різниці тригонометричних функцій у добуток

Тип уроку: урок формування вмінь і навичок.

План уроку

1. Спрощення та перетворення виразів.
2. Доведення тотожностей.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

висловлює власне ставлення до здобутої інформації та нові ідеї, які виникли в результаті аналізу інформаційних джерел, наводить контраргументи [12 МАО 1.2.1–2 П];

виявляє ініціативу, пропонує та обґрунтовує ідеї щодо способу розв'язання специфічних проблемних ситуацій [12 МАО 2.2.1–1 П];

обирає математичну модель розв'язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов [12 МАО 3.2.2–1 П];

добирає доцільні математичні поняття, факти і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.

- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.
- 6) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.
- 7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 8) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.
- 9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Чому зручніше виконувати перетворення добутоків тригонометричних функцій, аніж їхніх сум?
- 2) Чи можна записати коливальний процес, що складається із декількох коливань, за допомогою однієї формули?
- 3) Що спільного у формулах суми (різниці) косинусів та суми (різниці) синусів? Спробуйте придумати мнемонічне правило для запам'ятовування цих формул?
- 4) Чи обов'язково знати напам'ять формули суми (різниці) тангенсів і котангенсів? Можливо, краще уміти їх швидко вивести за допомогою інших формул тригонометрії?
- 5) Які труднощі можуть виникнути при спрощенні виразів, якщо не знати потрібних формул?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Обчисліть: $\frac{\operatorname{tg} 15^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ}{1 + \operatorname{tg} 15^\circ \operatorname{tg} 60^\circ}$.
Відповідь. -1 .
2. Обчисліть: $\sin^2 \frac{\pi}{8} - \cos^2 \frac{\pi}{8}$.
Відповідь. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Спростіть вираз $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$.

Відповідь. $\frac{1}{\sin^2 \alpha}$.

4. Спростіть вираз $\frac{\sin 26^\circ}{\sin 13^\circ}$.

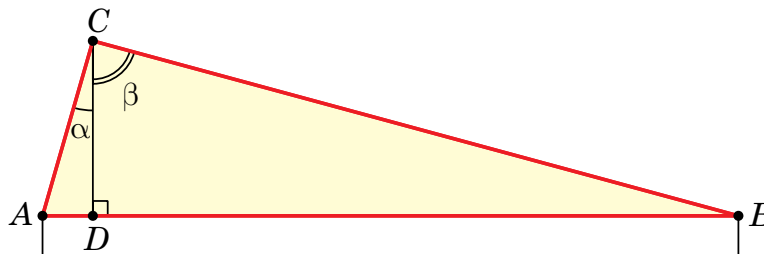
Відповідь. $2\cos 13^\circ$.

5. Спростіть вираз $\sin 3\alpha + \sin \alpha$.

Відповідь. $2\sin 2\alpha \cos \alpha$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Будівельники планують установити двосхилий дах на будинок, довжина якого $AB = 16$ м (див. рисунок). Дах має бути з різними кутами нахилу схилів, оскільки на південний схил CB планується установка сонячних панелей. Відомо, що кут α між основною опорою CD (при цьому $CD \perp AB$) та північним схилом CA має дорівнювати 15° , а кут β між CD та південним схилом CB має дорівнювати 75° . Розрахуйте висоту опори CD .



Задача 2. Олімпіадна задача. Обчисліть суму

$$\frac{1}{\cos 1 \cos 2} + \frac{1}{\cos 2 \cos 3} + \dots + \frac{1}{\cos(n-1) \cos n}, \text{ де } n > 1.$$

III. Спрощення та перетворення виразів

Повторимо основні формули для суми й різниці тригонометричних функцій.

Формули суми й різниці синусів

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Формули суми й різниці косинусів

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Формули суми й різниці тангенсів

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

Формули суми й різниці котангенсів

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}, \quad \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Ілюстративні приклади

6. Розкладіть на множники суму $\sin \frac{5\alpha}{3} + \sin \frac{3\alpha}{2}$.

Розв'язання. $\sin \frac{5\alpha}{3} + \sin \frac{3\alpha}{2} = 2 \sin \left(\frac{\frac{5\alpha}{3} + \frac{3\alpha}{2}}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\frac{5\alpha}{3} - \frac{3\alpha}{2}}{2} \right) = 2 \sin \frac{19\alpha}{12} \cdot \cos \frac{\alpha}{12}.$

Відповідь. $2 \sin \frac{19\alpha}{12} \cdot \cos \frac{\alpha}{12}.$

7. Спростіть вираз $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}$.

Розв'язання. $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \frac{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}.$

Відповідь. $\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}.$

8. Подайте у вигляді добутку $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$.

Розв'язання. **І спосіб.** $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = (\sin \alpha + \sin \beta)(\sin \alpha - \sin \beta) =$
 $= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} =$
 $= \left(2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \left(2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta).$

II спосіб. Скористаємось формулою пониження степеня:

$$\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} - \frac{1 - \cos 2\beta}{2} = \frac{1}{2}(\cos 2\beta - \cos 2\alpha) = \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta).$$

Відповідь. $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta).$

9. Спростіть вираз $\sin^2(\alpha - 30^\circ) + \sin^2(\alpha + 30^\circ) - \sin^2 \alpha$.

Розв'язання. Застосуємо до кожного доданка формулу пониження степеня:

$$\sin^2(\alpha - 30^\circ) + \sin^2(\alpha + 30^\circ) - \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha - 60^\circ)}{2} + \frac{1 - \cos(2\alpha + 60^\circ)}{2} - \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\alpha}{2} - \frac{\cos(2\alpha - 60^\circ) + \cos(2\alpha + 60^\circ)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\alpha}{2} - \frac{2 \cos 2\alpha \cos 60^\circ}{2} = \frac{1}{2}.$$

Відповідь. $\frac{1}{2}.$

10. Розкладіть на множники $\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \beta$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \beta &= (\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta)(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) = \\ &= \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\beta - \alpha)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}.\end{aligned}$$

Відповідь. $\frac{\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\beta - \alpha)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}$.

11. Обчисліть: $\frac{3(\cos 20^\circ - \sin 20^\circ)}{\sqrt{2} \sin 25^\circ}$.

Розв'язання. $\frac{3(\cos 20^\circ - \sin 20^\circ)}{\sqrt{2} \sin 25^\circ} = \frac{3(\cos(90^\circ - 70^\circ) - \sin 20^\circ)}{\sqrt{2} \sin 25^\circ} = \frac{3(\sin 70^\circ - \sin 20^\circ)}{\sqrt{2} \sin 25^\circ} =$
 $= \frac{3 \cdot 2 \sin 25^\circ \cdot \cos 45^\circ}{\sqrt{2} \sin 25^\circ} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3.$

Відповідь. 3.

12. Розкладіть на множники $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$.

Розв'язання. $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha = \sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha =$
 $= 2 \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha + \sin 2\alpha = \sin 2\alpha(2 \cos \alpha + 1) =$

$$\begin{aligned}&= \sin 2\alpha \cdot 2 \left(\cos \alpha + \frac{1}{2} \right) = 2 \sin 2\alpha \cdot \left(\cos \alpha + \cos \frac{\pi}{3} \right) = 4 \sin 2\alpha \cdot \cos \left(\frac{\alpha + \frac{\pi}{3}}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \frac{\pi}{3}}{2} \right) = \\ &= 4 \sin 2\alpha \cdot \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6} \right).\end{aligned}$$

Відповідь. $4 \sin 2\alpha \cdot \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6} \right).$

IV. Доведення тотожностей

Нагадаємо основні способи доведення тотожностей:

- 1) перетворити праву частину рівності так, щоб довести, що вона дорівнює лівій;
- 2) перетворити ліву частину рівності так, щоб довести, що вона дорівнює правій;
- 3) перетворити праву й ліву частини рівностей й звести їх до рівних виразів;
- 4) обчислити різницю лівої й правої частин рівності, яка має дорівнювати 0;
- 5) знайти частку лівої й правої частин рівності, яка має дорівнювати одиниці, при цьому потрібно вилучати значення змінних, при яких вираз, на який виконується ділення, перетворюється в 0.

Ілюстративні приклади

13. Доведіть тотожність $\frac{\cos 3\alpha + \cos \alpha}{\sin 3\alpha - \sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$.

Доведення. $\frac{\cos 3\alpha + \cos \alpha}{\sin 3\alpha - \sin \alpha} = \frac{2 \cos 2\alpha \cdot \cos \alpha}{2 \sin \alpha \cdot \cos 2\alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$, що й треба було довести.

14. Доведіть тотожність $\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha - \beta) = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Доведення. } \sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha - \beta) &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \\ &= 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \left(\sin \frac{\alpha + \beta}{2} + \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\ &= 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot 2 \sin \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = 4 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}, \end{aligned}$$

що й треба було довести.

15. Доведіть тотожність $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = \sin 2\alpha$.

$$\begin{aligned} \text{Доведення. } \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} &= \frac{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha + \alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}}{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha + \frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}} = \\ &= \frac{\sin 2\alpha \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\sin \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sin 2\alpha \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = \\ &= \frac{\sin 2\alpha \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Що й треба було довести.

16. Доведіть тотожність $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{8 \cos^2 2\alpha}{\sin 6\alpha}$.

$$\begin{aligned} \text{Доведення. } \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} + \frac{\cos 3\alpha}{\sin 3\alpha} &= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} + \frac{\sin^2 3\alpha + \cos^2 3\alpha}{\sin 3\alpha \cos 3\alpha} = \\ &= \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} + \frac{1}{\sin 3\alpha \cos 3\alpha} = \frac{2}{2 \sin \alpha \cos \alpha} + \frac{2}{2 \sin 3\alpha \cos 3\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha} + \frac{2}{\sin 6\alpha} = \\ &= \frac{2 \sin 6\alpha + 2 \sin 2\alpha}{\sin 2\alpha \sin 6\alpha} = \frac{2(\sin 6\alpha + \sin 2\alpha)}{\sin 2\alpha \sin 6\alpha} = \frac{2 \cdot 2 \sin 4\alpha \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha \sin 6\alpha} = \frac{4 \sin 4\alpha \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha \sin 6\alpha} = \\ &= \frac{4 \cdot 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha \sin 6\alpha} = \frac{8 \sin 2\alpha \cos^2 2\alpha}{\sin 2\alpha \sin 6\alpha} = \frac{8 \cos^2 2\alpha}{\sin 6\alpha}. \end{aligned}$$

Що й треба було довести.

17. Доведіть тотожність $\frac{\cos\left(\frac{5}{2}\pi - 6\alpha\right) + \sin(\pi + 4\alpha) + \sin(3\pi - \alpha)}{\sin\left(\frac{5}{2}\pi + 6\alpha\right) + \cos(4\alpha - 2\pi) + \cos(\alpha + 2\pi)} = \operatorname{tg} \alpha$.

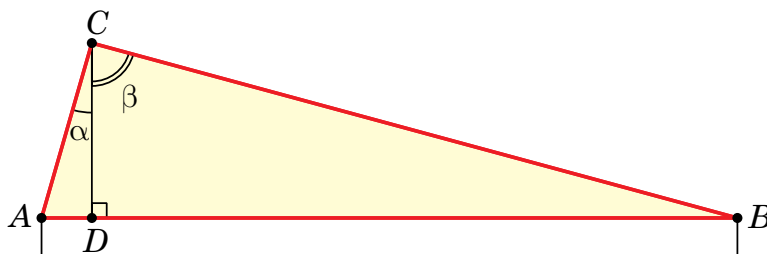
Доведення.
$$\frac{\cos\left(\frac{5}{2}\pi - 6\alpha\right) + \sin(\pi + 4\alpha) + \sin(3\pi - \alpha)}{\sin\left(\frac{5}{2}\pi + 6\alpha\right) + \cos(4\alpha - 2\pi) + \cos(\alpha + 2\pi)} = \frac{\sin 6\alpha - \sin 4\alpha + \sin \alpha}{\cos 6\alpha + \cos 4\alpha + \cos \alpha} =$$

$$= \frac{2 \cos 5\alpha \sin \alpha + \sin \alpha}{2 \cos 5\alpha \cos \alpha + \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha (2 \cos 5\alpha + 1)}{\cos \alpha (2 \cos 5\alpha + 1)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha, \text{ що й треба було довести.}$$

V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Будівельники планують установити двосхилий дах на будинок, довжина якого $AB = 16$ м (див. рисунок). Дах має бути з різними кутами нахилу схилів, оскільки на південний схил CB планується установка сонячних панелей. Відомо, що кут α між основною опорою CD (при цьому $CD \perp AB$) та північним схилом CA має дорівнювати 15° , а кут β між CD та південним схилом CB має дорівнювати 75° . Розрахуйте висоту опори CD .



Розв'язання. 1) Із трикутника ACD : $AD = CD \operatorname{tg} \alpha$.

2) Із трикутника BCD : $BD = CD \operatorname{tg} \beta$.

3) Оскільки $AB = AD + BD$, то $AB = CD(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)$.

При цьому, $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$, то $AB = CD \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$.

Звідси $CD = \frac{AB \cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.

4) Отже, $CD = \frac{16 \cos 15^\circ \cos 75^\circ}{\sin(15^\circ + 75^\circ)} = \frac{16 \cos 15^\circ \cos(90^\circ - 15^\circ)}{\sin 90^\circ} = 16 \cos 15^\circ \sin 15^\circ =$
 $= 8 \sin 30^\circ = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4 \text{ (м)}.$

Таким чином, висота опори CD даху становить 4 метри.

Відповідь. 4 м.

Задача 2. Олімпіадна задача. Обчисліть суму

$$\frac{1}{\cos 1 \cos 2} + \frac{1}{\cos 2 \cos 3} + \dots + \frac{1}{\cos(n-1) \cos n}, \text{ де } n > 1.$$

Розв'язання. Оскільки $\operatorname{tg} k - \operatorname{tg}(k-1) = \frac{\sin 1}{\cos(k-1) \cos k}$, то

$$\frac{1}{\cos(k-1) \cos k} = \frac{-\operatorname{tg}(k-1) + \operatorname{tg} k}{\sin 1}.$$

$$\text{Маємо } \frac{1}{\cos 1 \cos 2} = \frac{-\operatorname{tg} 1 + \operatorname{tg} 2}{\sin 1}, \quad \frac{1}{\cos 2 \cos 3} = \frac{-\operatorname{tg} 2 + \operatorname{tg} 3}{\sin 1}, \dots,$$

$$\frac{1}{\cos(n-1) \cos n} = \frac{-\operatorname{tg}(n-1) + \operatorname{tg} n}{\sin 1}.$$

Додамо отримані рівності:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos 1 \cos 2} + \frac{1}{\cos 2 \cos 3} + \dots + \frac{1}{\cos(n-1) \cos n} &= \\ &= \frac{-\operatorname{tg} 1 + \operatorname{tg} 2 - \operatorname{tg} 2 + \operatorname{tg} 3 - \operatorname{tg} 3 + \operatorname{tg} 4 - \dots - \operatorname{tg}(n-1) + \operatorname{tg} n}{\sin 1} = \frac{-\operatorname{tg} 1 + \operatorname{tg} n}{\sin 1}. \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь. } \frac{-\operatorname{tg} 1 + \operatorname{tg} n}{\sin 1}.$$

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)**Рівень А**

1. Запишіть у вигляді добутку:

$$1) \cos 40^\circ + \cos 50^\circ; \quad 2) \sin \frac{\pi}{7} + \cos \frac{\pi}{5}; \quad 3) \cos 18^\circ - \cos 10^\circ; \quad 4) \cos 4^\circ - \cos 28^\circ;$$

$$5) \sin 26^\circ + \sin 14^\circ; \quad 6) \sin 1^\circ + \cos 64^\circ; \quad 7) \sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{12}; \quad 8) \cos \frac{\pi}{8} - \cos \frac{\pi}{18}.$$

2. Розкладіть на множники:

$$\begin{aligned} 1) \sin 4\alpha + \sin 2\alpha; & \quad 2) \cos 2\alpha - \cos 6\alpha; \\ 3) \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} 3\alpha; & \quad 4) \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta); \\ 5) \sin(60^\circ + \alpha) - \sin(60^\circ - \alpha); & \quad 6) \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

3. Доведіть тотожність:

$$\begin{aligned} 1) \cos 3\alpha \cdot \cos 9\alpha - \cos 12\alpha &= \sin 3\alpha \cdot \sin 9\alpha; \\ 2) \frac{\sin \alpha + \sin 9\alpha}{\cos \alpha + \cos 9\alpha} &= \operatorname{tg} 5\alpha. \end{aligned}$$

4. Доведіть тотожність:

$$1) \frac{\sin 56^\circ + \sin 34^\circ}{\sin 56^\circ - \sin 34^\circ} = \operatorname{ctg} 11^\circ; \quad 2) \frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\sin \alpha + \sin \beta} = \operatorname{tg} \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

5. Перетворіть у добуток:

$$1) 1 + 2\cos \alpha; \quad 2) 1 - 2\cos \alpha; \quad 3) \sqrt{3} + 2\cos \alpha; \quad 4) \sqrt{3} \operatorname{tg} x - 1.$$

6. Доведіть тотожність:

$$\begin{aligned} 1) \sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha &= 4 \cos \alpha \cos 2\alpha \sin 4\alpha; \\ 2) \frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha} &= \operatorname{tg} 2\alpha. \end{aligned}$$

Рівень В

1. Перетворіть у добуток:

- 1) $\cos \beta - \sin \alpha$; 2) $\sin \alpha + \cos \alpha$; 3) $\sin \alpha - \cos \alpha$;
4) $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$; 5) $\sin^2 5\alpha - \sin^2 3\alpha$; 6) $\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta$.

2. Спростіть вираз:

- 1) $\sin 3\alpha + \sin 6\alpha + \sin 9\alpha$; 2) $\frac{\cos 5\alpha + \cos 6\alpha + \cos 7\alpha}{\sin 5\alpha + \sin 6\alpha + \sin 7\alpha}$.

3. Обчисліть:

- 1) $\frac{\sin 43^\circ + \sin 17^\circ}{2\cos 13^\circ + 3\sin 77^\circ}$; 2) $\frac{\cos 6^\circ + \cos 12^\circ + \cos 36^\circ + \cos 42^\circ}{\sin 87^\circ \cdot \cos 15^\circ \cdot \cos 24^\circ}$.

4. Перетворіть у добуток:

- 1) $\sin 12^\circ + \sin 28^\circ + \sin 40^\circ$; 2) $\cos 22^\circ + \cos 24^\circ + \cos 26^\circ + \cos 28^\circ$;
3) $\sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{3\pi}{10}$; 4) $\cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{6}$.

5. Доведіть тотожність:

- 1) $(\sin \alpha + \sin \beta)^2 + (\cos \alpha + \cos \beta)^2 = 4 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2}$;
2) $(\sin \alpha - \sin \beta)^2 + (\cos \alpha - \cos \beta)^2 = 4 \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}$;
3) $\sin x + \sin y + \sin(x + y) = 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \sin \frac{x + y}{2}$;
4) $\sin x + \sin y - \sin(x + y) = 4 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{x + y}{2}$.

6. Доведіть тотожність:

- 1) $\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha)$; 2) $\frac{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} = \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) \cdot \operatorname{tg} \beta$;
3) $\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha)$; 4) $\frac{\operatorname{ctg} \alpha + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - 1} = \operatorname{ctg}(45^\circ - \alpha)$.

7. Доведіть тотожність:

- 1) $\frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha} = \operatorname{tg} 4\alpha$; 2) $\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha}{\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg} 2,5\alpha$.

8. Розкладіть на множники:

- 1) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta$; 2) $\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \beta$; 3) $\operatorname{tg}^2 15^\circ - \operatorname{ctg}^2 x$; 4) $\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 y$.

9. Доведіть тотожність:

- 1) $\sin 50^\circ + \sin 10^\circ - \cos 20^\circ = 0$; 2) $\cos 48^\circ + \sin 18^\circ - \cos 12^\circ = 0$.

10. Доведіть тотожність:

- 1) $\sqrt{1 + \sin \alpha} + \sqrt{1 - \sin \alpha} = 2 \cos \frac{\alpha}{2}$, якщо $0^\circ < \alpha < 90^\circ$;
2) $\sqrt{1 + \sin \alpha} - \sqrt{1 - \sin \alpha} = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$, якщо $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

11. Доведіть тотожність:

- 1) $\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 3\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$;
2) $\operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{tg} 2\alpha + 4 \operatorname{tg} 4\alpha + 8 \operatorname{tg} 8\alpha + 16 \operatorname{ctg} 16\alpha = \operatorname{ctg} \alpha$.

12. Доведіть тотожність:

$$1) \frac{1}{\operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{tg} \alpha} - \frac{1}{\operatorname{ctg} 3\alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \operatorname{ctg} 4\alpha;$$

$$2) \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{8 \cos^2 2\alpha}{\sin 6\alpha}.$$

Рівень С

1. Обчисліть:

$$1) (\operatorname{tg} 14^\circ + \operatorname{ctg} 28^\circ) \cdot \cos 14^\circ \cdot \sin 14^\circ; \quad 2) \frac{\sin^2 \frac{\pi}{5} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{5}}{1 - \cos^4 \frac{2\pi}{5} - \cos^2 \frac{2\pi}{5} \cdot \sin^2 \frac{2\pi}{5}}.$$

2. Доведіть тотожність:

$$1) \operatorname{tg} \frac{\pi}{16} + \operatorname{tg} \frac{3\pi}{16} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{16} \operatorname{tg} \frac{3\pi}{16} = 1; \quad 2) \operatorname{tg} \frac{7\pi}{8} - \operatorname{tg} \frac{5\pi}{8} - \operatorname{tg} \frac{7\pi}{8} \operatorname{tg} \frac{5\pi}{8} = 1.$$

3. Доведіть тотожність, якщо $\alpha + \beta + \gamma = \pi$:

$$1) \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma;$$

$$2) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}.$$

4. Обчисліть:

$$1) \sin 5\alpha - \sin 3\alpha, \text{ якщо } \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}; \quad 2) \cos 3\alpha - \cos 5\alpha, \text{ якщо } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

5. Доведіть, що $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) - \sin \frac{\pi}{12} \cos\left(\frac{\pi}{12} + 2\alpha\right) = \sin 2\alpha$.

6. Перевірте правильність рівності

$$0,5 \sin 40^\circ - \cos 30^\circ + \cos 20^\circ \cos 10^\circ = 2\sqrt{3} \sin^2 20^\circ \cos 20^\circ.$$

7. Творче завдання. Створіть візуалізацію геометричної інтерпретації формул суми й різниці тригонометричних функцій.

VII. Рефлексія. «Плюс-Мінус-Цікавинка» (1–2 хв)

(+) що було зрозумілим:

.....

.....

(-) що залишилося незрозумілим:

.....

.....

(?) що здивувало або зацікавило:

.....

.....

Можливі теми проєктів

- 1.** Створення мнемонічних правил для запам'ятовування формул суми й різниці тригонометричних функцій.
- 2.** Геометричне обґрунтування формул суми й різниці тригонометричних функцій.
- 3.** Використання формул тригонометрії для спрощення виразів та обчислень.
- 4.** Вплив похибок та наближених обчислень на точність обчислень при використанні формул суми й різниці тригонометричних функцій.
- 5.** Роль формул суми й різниці тригонометричних функцій у перетвореннях Фур'є.