

11

Тема 2. Співвідношення між тригонометричними функціями

Урок 14. Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) вивчите формулу перетворення добутку синусів у суму;
- 2) вивчите формулу перетворення добутку косинусів у суму;
- 3) вивчите формулу перетворення добутку синуса та косинуса в суму;
- 4) з'ясуєте, як застосовувати формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму для спрощення виразів;
- 5) дізнаєтесь, як застосовувати формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму для доведення тотожностей;
- 6) навчитесь використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Спростіть вираз $1 + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$.
2. Перетворіть у добуток вираз $1 - \cos \alpha$.
3. Обчисліть: $\frac{2 \operatorname{tg} 15^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ}$.
4. Обчисліть $\sin \frac{25\pi}{6}$.
5. Спростіть вираз $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha}$.

V. Перетворення добутку синуса та косинуса в суму

Запишемо уже відомі нам формули синуса різниці та синуса суми:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha ,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha .$$

Додамо почленно ці формули:

$$\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta .$$

$$\text{Звідки } \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)) .$$

Таким чином, добутки синусів, косинусів та синуса й косинуса деяких кутів перетворюються в різниці або в суми тригонометричних функцій за формулами:

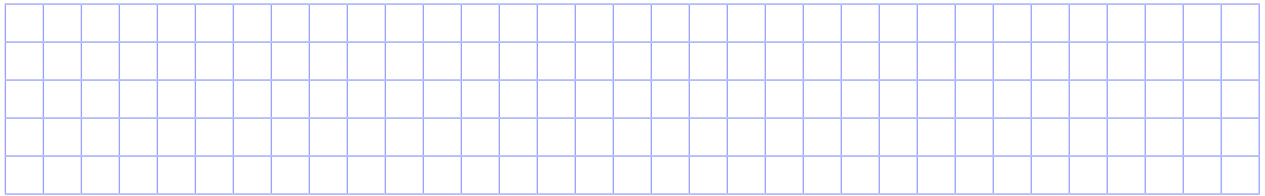
$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) ,$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) ,$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)) .$$

VI. Спрощення та перетворення виразів

Приклад 5. Перетворіть у суму добуток $2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)$.



Приклад 6. Знайдіть головний період функції $y = 2 \cos 3x \sin 7x$.

Розв'язання. 1) Запишемо добуток косинуса й синуса через суму:

$$y = 2 \cos 3x \sin 7x = \sin 4x + \sin 10x .$$

Отже, задану функцію можна подати у вигляді суми двох періодичних функцій:

$$y_1 = \sin 4x , \text{ головний період якої } T_1 = 2\pi : 4 = \frac{\pi}{2} , \text{ та } y_2 = \sin 10x , \text{ головний період якої}$$

$$T_2 = 2\pi : 10 = \frac{\pi}{5} .$$

2) Відношення періодів: $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{5} = \frac{5}{2}$ — сумірне число, тому період даної функції

$$T = 2T_1 = 5T_2 = \pi .$$

Відповідь. π .

VI. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. На радіостанції використовується амплітудна модуляція сигналу. Опорний сигнал має частоту 100 кГц, а інформаційний сигнал — частоту 1 кГц. Коефіцієнт модуляції становить 0,5, тобто сигнал можна задати рівнянням

$$f(t) = (1 + 0,5 \sin(2\pi \cdot 1000t)) \cdot \sin(2\pi \cdot 100\,000t).$$

1. Знайдіть функцію, що задає сигнал у вигляді суми тригонометричних функцій.
2. Визначте всі частоти, які з'являються після модуляції.

Примітка. Знайдіть інформацію про амплітудну модуляцію сигналу, опорний сигнал передачі та інформаційний сигнал.

Задача 2. Олімпіадна задача. Доведіть тотожність

$$\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \dots + \cos(2n-1)\alpha = \frac{\sin 2n\alpha}{2 \sin \alpha}, \text{ де } n \text{ — число доданків.}$$

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Перетворіть добуток у суму:

- | | | |
|--|--|---|
| 1) $2 \sin 15^\circ \cdot \cos 10^\circ$; | 2) $\sin \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{\pi}{8}$; | 3) $\cos 15^\circ \cdot \cos 5^\circ$; |
| 4) $2 \cos(a+b) \cdot \cos(a-b)$; | 5) $\cos x \cdot \cos(x+1)$; | 6) $\cos\left(\frac{x}{2}+2\right) \cdot \cos\left(\frac{3x}{2}+1\right)$. |

2. Обчисліть:

- | | | |
|--|---|---|
| 1) $\sin 15^\circ \cdot \cos 45^\circ$; | 2) $\sin \frac{\pi}{24} \cdot \sin \frac{5\pi}{24}$; | 3) $\cos 75^\circ \cdot \sin 105^\circ$. |
|--|---|---|

3. Спростіть вираз:

- | | |
|--|---|
| 1) $2 \cos 20^\circ \cos 40^\circ - \cos 20^\circ$; | 2) $\sin \alpha (1 + 2 \cos 2\alpha)$. |
|--|---|

4. Спростіть вираз:

- | | |
|--|---|
| 1) $\sin^2 \alpha + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$; | 2) $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)$. |
|--|---|

5. Обчисліть:

- | | |
|---|---|
| 1) $\sin \frac{11\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24}$; | 2) $\cos \frac{13\pi}{24} \cos \frac{7\pi}{24}$. |
|---|---|

6. Доведіть тотожність:

- | | |
|--|--|
| 1) $\sin \frac{9\pi}{28} \cos \frac{5\pi}{28} - \sin \frac{6\pi}{35} \cos \frac{\pi}{35} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{5}$; | |
| 2) $\cos \frac{3\pi}{16} \cos \frac{\pi}{16} - \cos \frac{5\pi}{16} \sin \frac{3\pi}{16} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. | |

Рівень В

1. Перетворіть добуток у суму:

1) $\sin(x - y) \cdot \cos(x + y)$;

2) $2 \cos 3 \cdot \sin 2$.

2. Перетворіть добуток у суму:

1) $2 \sin(m + n) \cdot \sin(m - n)$;

2) $4 \sin 25^\circ \cdot \cos 15^\circ \cdot \sin 5^\circ$;

3) $\sin 10^\circ \cdot \cos 8^\circ \cdot \cos 6^\circ$;

4) $4 \sin 12^\circ \cdot \sin 14^\circ \cdot \sin 16^\circ$.

3. Перетворіть добуток у суму:

1) $4 \cos 25^\circ \cdot \cos 35^\circ \cdot \cos 15^\circ$;

2) $8 \cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \cos 8^\circ$;

3) $8 \sin A \cdot \sin 2A \cdot \sin 3A \cdot \sin 4A$;

4) $8 \sin 1 \cdot \cos 2 \cdot \sin 4 \cdot \cos 8$.

4. Доведіть тотожність:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \cos 2\alpha = -\frac{1}{4} \sin 2\alpha$;

2) $-2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right) \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 4\alpha$.

5. Доведіть тотожність:

1) $\frac{-2 \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cos\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right)}{\sin 2\alpha} = 1$;

2) $\sin(3\pi + \alpha) \sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) = \frac{1}{4} \sin 3\alpha$.

6. Обчисліть:

1) $\sin 15^\circ \cos 7^\circ - \cos 11^\circ \cos 79^\circ - \sin 4^\circ \sin 86^\circ$;

2) $\cos 17^\circ \cos 73^\circ - \sin 13^\circ \cos 21^\circ - \cos 4^\circ \cos 86^\circ$.

7. Спростіть вираз:

1) $\frac{\sin 3\alpha - \sin \alpha \cos 2\alpha}{\sin 3\alpha + \sin \alpha}$;

2) $\frac{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}{\cos 2\alpha - \cos \alpha \cos 3\alpha}$.

8. Знайдіть головний період функції:

1) $f(x) = 2 \sin 3x \sin x$.

2) $f(x) = \cos 2x \cos 3x$.

9. Спростіть вираз:

1) $\sin x \sin y \sin z$; 2) $\cos x \cos y \cos z$; 3) $\sin^2 x \cos 4x$; 4) $\cos^2 2x \sin 3x$.

10. Доведіть тотожність:

1) $\sin^2 x + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{1}{4}$;

2) $4 \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 3 - 4 \sin^2 x$.

11. Спростіть вираз:

1) $(\sin x - \sin y)(\sin x + \sin y) - \sin(x - y) \sin(x + y)$;

2) $\sin^2(x + y) + \sin^2(x - y) + \sin 2x \sin 2y$.

12. Розкладіть на множники:

1) $\cos 3x \cos 5x + \sin x \sin 7x$;

2) $\sin 4x \cos 3x + \cos 2x \cos x - \sin 5x \cos 2x$.

Рівень С

1. Знайдіть $\sin 2\alpha \cos 5\alpha - \sin \alpha \cos 6\alpha$, якщо $\sin \alpha = a$.
2. Обчисліть:
 - 1) $\cos \frac{\pi}{24} \cos \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{7\pi}{16} \sin \frac{5\pi}{24}$;
 - 2) $\sin \frac{7\pi}{16} \sin \frac{3\pi}{8} \sin \frac{7\pi}{24} \sin \frac{\pi}{16} \sin \frac{\pi}{24}$.
3. Обчисліть:
 - 1) $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$;
 - 2) $\cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7}$.
4. Доведіть тотожність:
 - 1) $\sin^2 x - \cos^2(y-x) + 2\cos x \cos y \cos(x-y) = \cos^2 y$;
 - 2) $\cos^2 x + \cos^2 y - \sin^2(x+y) = 2\cos x \cos y \cos(x+y)$.
5. Доведіть тотожність $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \dots + \sin n\alpha = \frac{\sin \frac{n\alpha}{2} \sin \frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$.
6. Знайдіть головний період функції:
 - 1) $f(x) = 4\sin^2 5x - \cos x \sin 3x$;
 - 2) $y = 5\sin^2 3x - 2\sin x \cos^2 x$.

Рефлексія

- 1) Я сьогодні навчився/навчилась
- 2) Мені здалося цікавим
- 3) У мене залишилися запитання щодо
- 4) Мені потрібно більше працювати над

Можливі теми проєктів

1. Використання формул перетворення добутку тригонометричних функцій у суму при амплітудній модуляції.
2. Використання формул тригонометрії у програмуванні.
3. Обробка сигналів та формули тригонометрії.
4. Створення лепбука «Формули тригонометрії».
5. Роль формул перетворення добутку тригонометричних функцій у суму в математичному аналізі.







