

11

Тема 2. Співвідношення між тригонометричними функціями

Урок 14. Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму

Тип уроку: урок засвоєння нових знань.

План уроку

1. Добуток синусів.
2. Добуток косинусів.
3. Добуток синуса та косинуса.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

самостійно або у взаємодії з іншими виокремлює спільні ознаки специфічних проблемних ситуацій, для розв'язання яких можна застосувати подібні методи [12 МАО 1.1.2–1 П];

виявляє ініціативу, пропонує та обґрунтовує ідеї щодо способу розв'язання специфічних проблемних ситуацій [12 МАО 2.2.1–1 П];

визначає необхідність і достатність набору даних проблемної ситуації та математичних фактів для її розв'язання [12 МАО 3.1.1–2 П];

робить висновки щодо застосування математичних понять і фактів [12 МАО 4.1.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого. Завдання можна розв'язувати усно.
- 3) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні задачі. Обирайте ілюстративні задачі на власний розсуд.

5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.

6) Пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач і навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

7) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

8) Можливі теми для створення проєктів запропоновані.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чи потрібно у практичних задачах (наприклад, коливаннях радіохвиль) застосовувати формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму?

2) Чи можна знайти головний період періодичної функції, якщо вона записана у вигляді добутку двох тригонометричних функцій?

3) В яких випадках краще використовувати добуток функцій, а в яких — суму? Чи корисно мати «місток» між цими двома діями?

4) Чи знаєте ви, що формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму найчастіше використовуються в теорії передачі сигналів?

5) Чи сприяють формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму знаходженню періодів функцій, записаних за допомогою складних тригонометричних виразів?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Спростіть вираз $1 + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$.

Відповідь. 2.

2. Перетворіть у добуток вираз $1 - \cos \alpha$.

Відповідь. $2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$.

3. Обчисліть: $\frac{2 \operatorname{tg} 15^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ}$.

Відповідь. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. Обчисліть $\sin \frac{25\pi}{6}$.

Відповідь. 0,5.

5. Спростіть вираз $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha}$.

Відповідь. $\operatorname{tg}^2 \alpha$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. На радіостанції використовується амплітудна модуляція сигналу. Опорний сигнал має частоту 100 кГц, а інформаційний сигнал — частоту 1 кГц. Коефіцієнт модуляції становить 0,5, тобто сигнал можна задати рівнянням $f(t) = (1 + 0,5 \sin(2\pi \cdot 1000t)) \cdot \sin(2\pi \cdot 100\,000t)$.

1. Знайдіть функцію, що задає сигнал у вигляді суми тригонометричних функцій.
2. Визначте всі частоти, які з'являються після модуляції.

Примітка. Знайдіть інформацію про амплітудну модуляцію сигналу, опорний сигнал передачі та інформаційний сигнал.

Задача 2. Олімпіадна задача. Доведіть тотожність

$$\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \dots + \cos(2n-1)\alpha = \frac{\sin 2n\alpha}{2 \sin \alpha}, \text{ де } n \text{ — число доданків.}$$

III. Перетворення добутку синусів у суму

Запишемо уже відомі нам формули косинуса різниці та косинуса суми:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Віднімаємо почленно від першої формули другу:

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\text{Звідки } \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

Ілюстративні приклади (5–7 хв)

6. Перетворіть добуток $\sin 48^\circ \sin 74^\circ$ у суму.

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання. } \sin 48^\circ \sin 74^\circ &= \frac{1}{2}(\cos(48^\circ - 74^\circ) - \cos(48^\circ + 74^\circ)) = \\ &= \frac{1}{2}(\cos(-26^\circ) - \cos 122^\circ) = \frac{1}{2}\cos 26^\circ - \frac{1}{2}\cos 122^\circ. \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь. } \frac{1}{2}\cos 26^\circ - \frac{1}{2}\cos 122^\circ.$$

7. Перетворіть добуток у суму: $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$.

$$\text{Розв'язання. } \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha - \frac{\pi}{6} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha + \frac{\pi}{6} - \alpha\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\cos 2\alpha - \cos \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \cos 2\alpha - \frac{1}{4}.$$

Відповідь. $\frac{1}{2} \cos 2\alpha - \frac{1}{4}$.

8. Обчисліть: $\frac{1}{2 \sin 10^\circ} - 2 \sin 70^\circ$.

Розв'язання. Знайдемо різницю виразів:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 \sin 10^\circ} - 2 \sin 70^\circ &= \frac{1 - 4 \sin 70^\circ \sin 10^\circ}{2 \sin 10^\circ} = \frac{1 - 2(\cos 60^\circ - \cos 80^\circ)}{2 \sin 10^\circ} = \frac{1 - 2\left(\frac{1}{2} - \sin 10^\circ\right)}{2 \sin 10^\circ} = \\ &= \frac{1 - 1 + 2 \sin 10^\circ}{2 \sin 10^\circ} = 1. \end{aligned}$$

Відповідь. 1.

9. Спростіть вираз $2 \sin 2\alpha \sin \alpha + \cos 3\alpha$.

Розв'язання. $2 \sin 2\alpha \sin \alpha + \cos 3\alpha = 2 \cdot \frac{1}{2} (\cos(2\alpha - \alpha) - \cos(2\alpha + \alpha)) + \cos 3\alpha =$
 $= \cos \alpha - \cos 3\alpha + \cos 3\alpha = \cos \alpha$

Відповідь. $\cos \alpha$.

IV. Перетворення добутку косинусів у суму

Запишемо відомі нам формули косинуса різниці та косинуса суми:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Додамо почленно ці формули:

$$\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta.$$

Звідки $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$.

Ілюстративні приклади

10. Обчисліть $\cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{3\pi}{8}$.

Розв'язання. $\cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{8} - \frac{3\pi}{8} \right) \right) =$
 $= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} + \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4}.$

Відповідь. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

11. Перетворіть добуток у суму $\cos \alpha \cos 3\alpha$.

Розв'язання. $\cos \alpha \cos 3\alpha = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - 3\alpha) + \cos(\alpha + 3\alpha)) = \frac{1}{2} (\cos 2\alpha + \cos 4\alpha).$

Відповідь. $\frac{1}{2} (\cos 2\alpha + \cos 4\alpha).$

12. Доведіть тотожність $4 \cos \alpha \cos(60^\circ - \alpha) \cos(60^\circ + \alpha) = \cos 3\alpha$.

Доведення. $4 \cos \alpha \cos(60^\circ - \alpha) \cos(60^\circ + \alpha) =$
 $= 2 \cos \alpha (\cos(60^\circ - \alpha - 60^\circ - \alpha) + \cos(60^\circ - \alpha + 60^\circ + \alpha)) =$
 $= 2 \cos \alpha (\cos 2\alpha + \cos 120^\circ) = 2 \cos \alpha \left(\cos 2\alpha - \frac{1}{2} \right) = 2 \cos \alpha \cos 2\alpha - \cos \alpha =$
 $= \cos \alpha + \cos 3\alpha - \cos \alpha = \cos 3\alpha$, що й треба було довести.

V. Перетворення добутку синуса та косинуса в суму

Запишемо уже відомі нам формули синуса різниці та синуса суми:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha.$$

Додамо почленно ці формули:

$$\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta.$$

Звідки $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$.

Таким чином, добутки синусів, косинусів та синуса й косинуса деяких кутів перетворюються в різниці або в суми тригонометричних функцій за формулами:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)),$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)),$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)).$$

VI. Спрощення та перетворення виразів

Ілюстративні приклади

13. Перетворіть у суму добуток $2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)$.

Розв'язання. $2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) =$
 $= 2 \cdot \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta - \alpha + \beta) + \sin(\alpha + \beta + \alpha - \beta)) = \sin 2\beta + \sin 2\alpha.$

Відповідь. $\sin 2\beta + \sin 2\alpha$.

14. Доведіть тотожність $\sin 3\alpha - \sin 2\alpha \cos \alpha = \sin \alpha \cos 2\alpha$.

Доведення. $\sin 3\alpha - \sin 2\alpha \cos \alpha = \sin 3\alpha - \frac{1}{2} (\sin \alpha + \sin 3\alpha) = \sin 3\alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{1}{2} \sin 3\alpha =$
 $= \frac{1}{2} \sin 3\alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha = \frac{1}{2} (\sin 3\alpha - \sin \alpha) = \sin \alpha \cos 2\alpha$, що й треба було довести.

15. Спростіть вираз $\sin 2\alpha + 2 \sin\left(\frac{5\pi}{12} - \alpha\right) \cos\left(\frac{5\pi}{12} + \alpha\right)$.

Розв'язання. $\sin 2\alpha + 2 \sin\left(\frac{5\pi}{12} - \alpha\right) \cos\left(\frac{5\pi}{12} + \alpha\right) =$

$$\begin{aligned}
&= \sin 2\alpha + \sin\left(\frac{5\pi}{12} - \alpha - \frac{5\pi}{12} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{12} - \alpha + \frac{5\pi}{12} + \alpha\right) = \\
&= \sin 2\alpha + \sin(-2\alpha) + \sin \frac{5\pi}{6} = \sin 2\alpha - \sin 2\alpha + \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = 0,5.
\end{aligned}$$

Відповідь. 0,5.

16. Знайдіть головний період функції $y = 2 \cos 3x \sin 7x$.

Розв'язання. 1) Запишемо добуток косинуса й синуса через суму:

$$y = 2 \cos 3x \sin 7x = \sin 4x + \sin 10x.$$

Отже, задану функцію можна подати у вигляді суми двох періодичних функцій:

$$y_1 = \sin 4x, \text{ головний період якої } T_1 = 2\pi : 4 = \frac{\pi}{2}, \text{ та } y_2 = \sin 10x, \text{ головний період якої}$$

$$T_2 = 2\pi : 10 = \frac{\pi}{5}.$$

2) Відношення періодів: $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{5} = \frac{5}{2}$ — сумірне число, тому період даної функції

$$T = 2T_1 = 5T_2 = \pi.$$

Відповідь. π .

VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. На радіостанції використовується амплітудна модуляція сигналу. Опорний сигнал має частоту 100 кГц, а інформаційний сигнал — частоту 1 кГц. Коефіцієнт модуляції становить 0,5, тобто сигнал можна задати рівнянням

$$f(t) = (1 + 0,5 \sin(2\pi \cdot 1000t)) \cdot \sin(2\pi \cdot 100000t).$$

1. Знайдіть функцію, що задає сигнал у вигляді суми тригонометричних функцій.
2. Визначте всі частоти, які з'являються після модуляції.

Примітка. Знайдіть інформацію про амплітудну модуляцію сигналу, опорний сигнал передачі та інформаційний сигнал.

Розв'язання. 1. У формулі, що задає сигнал радіостанції, розкриємо дужки та подамо добуток тригонометричних функцій як суму:

$$f(t) = (1 + 0,5 \sin(2\pi \cdot 1000t)) \cdot \sin(2\pi \cdot 100000t),$$

$$f(t) = \sin(2\pi \cdot 100000t) + 0,5 \sin(2\pi \cdot 1000t) \cdot \sin(2\pi \cdot 100000t),$$

$$f(t) = \sin(2\pi \cdot 100000t) + \frac{1}{4} (\cos(2\pi \cdot 100000t - 2\pi \cdot 1000t) - \cos(2\pi \cdot 100000t + 2\pi \cdot 1000t)),$$

$$f(t) = \sin(2\pi \cdot 100000t) + \frac{1}{4} \cos(2\pi \cdot 99000t) - \frac{1}{4} \cos(2\pi \cdot 101000t).$$

2. Отже, сигнал може передаватися на частотах: 100 кГц, 99 кГц та 101 кГц.

Відповідь. 1. $f(t) = \sin(2\pi \cdot 100000t) + \frac{1}{4} \cos(2\pi \cdot 99000t) - \frac{1}{4} \cos(2\pi \cdot 101000t).$

2. 100 кГц; 99 кГц; 101 кГц.

Задача 2. Олімпіадна задача. Доведіть тотожність

$$\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \dots + \cos(2n-1)\alpha = \frac{\sin 2n\alpha}{2 \sin \alpha}, \text{ де } n \text{ — число доданків.}$$

Доведення. Нехай $S_n(\alpha) = \cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \dots + \cos(2n-1)\alpha$.

$$2 \sin \alpha \cdot S_n(\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \sin \alpha \cos 3\alpha + 2 \sin \alpha \cos 5\alpha + \dots + 2 \sin \alpha \cdot \cos(2n-1)\alpha.$$

$$2 \sin \alpha \cdot S_n(\alpha) = \sin 2\alpha + 2 \cdot \frac{1}{2}(\sin(-2\alpha) + \sin 4\alpha) + \frac{1}{2}(\sin(-4\alpha) + \sin 6\alpha) + \dots + \\ + 2 \cdot \frac{1}{2}(\sin(-2n+2)\alpha + \sin 2n\alpha).$$

$$2 \sin \alpha \cdot S_n(\alpha) = \sin 2\alpha - \sin 2\alpha + \sin 4\alpha - \sin 4\alpha + \sin 6\alpha - \dots - \sin(2n-2)\alpha + \sin 2n\alpha.$$

$$2 \sin \alpha \cdot S_n(\alpha) = \sin 2n\alpha.$$

$$S_n(\alpha) = \frac{\sin 2n\alpha}{2 \sin \alpha}, \text{ що й треба було довести.}$$

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)**Рівень А**

1. Перетворіть добуток у суму:

1) $2 \sin 15^\circ \cdot \cos 10^\circ$;

2) $\sin \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{\pi}{8}$;

3) $\cos 15^\circ \cdot \cos 5^\circ$;

4) $2 \cos(a+b) \cdot \cos(a-b)$;

5) $\cos x \cdot \cos(x+1)$;

6) $\cos\left(\frac{x}{2}+2\right) \cdot \cos\left(\frac{3x}{2}+1\right)$.

2. Обчисліть:

1) $\sin 15^\circ \cdot \cos 45^\circ$;

2) $\sin \frac{\pi}{24} \cdot \sin \frac{5\pi}{24}$;

3) $\cos 75^\circ \cdot \sin 105^\circ$.

3. Спростіть вираз:

1) $2 \cos 20^\circ \cos 40^\circ - \cos 20^\circ$;

2) $\sin \alpha(1 + 2 \cos 2\alpha)$.

4. Спростіть вираз:

1) $\sin^2 \alpha + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$;

2) $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)$.

5. Обчисліть:

1) $\sin \frac{11\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24}$;

2) $\cos \frac{13\pi}{24} \cos \frac{7\pi}{24}$.

6. Доведіть тотожність:

1) $\sin \frac{9\pi}{28} \cos \frac{5\pi}{28} - \sin \frac{6\pi}{35} \cos \frac{\pi}{35} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{5}$;

2) $\cos \frac{3\pi}{16} \cos \frac{\pi}{16} - \cos \frac{5\pi}{16} \sin \frac{3\pi}{16} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Рівень В

1. Перетворіть добуток у суму:

1) $\sin(x-y) \cdot \cos(x+y)$;

2) $2 \cos 3 \cdot \sin 2$.

2. Перетворіть добуток у суму:

1) $2 \sin(m+n) \cdot \sin(m-n)$;

2) $4 \sin 25^\circ \cdot \cos 15^\circ \cdot \sin 5^\circ$;

3) $\sin 10^\circ \cdot \cos 8^\circ \cdot \cos 6^\circ$;

4) $4 \sin 12^\circ \cdot \sin 14^\circ \cdot \sin 16^\circ$.

3. Перетворіть добуток у суму:

1) $4 \cos 25^\circ \cdot \cos 35^\circ \cdot \cos 15^\circ$;

2) $8 \cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \cos 8^\circ$;

3) $8 \sin A \cdot \sin 2A \cdot \sin 3A \cdot \sin 4A$;

4) $8 \sin 1 \cdot \cos 2 \cdot \sin 4 \cdot \cos 8$.

4. Доведіть тотожність:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \cos 2\alpha = -\frac{1}{4} \sin 2\alpha$;

2) $-2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right) \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 4\alpha$.

5. Доведіть тотожність:

1) $\frac{-2 \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cos\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right)}{\sin 2\alpha} = 1$;

2) $\sin(3\pi + \alpha) \sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) = \frac{1}{4} \sin 3\alpha$.

6. Обчисліть:

1) $\sin 15^\circ \cos 7^\circ - \cos 11^\circ \cos 79^\circ - \sin 4^\circ \sin 86^\circ$;

2) $\cos 17^\circ \cos 73^\circ - \sin 13^\circ \cos 21^\circ - \cos 4^\circ \cos 86^\circ$.

7. Спростіть вираз:

1) $\frac{\sin 3\alpha - \sin \alpha \cos 2\alpha}{\sin 3\alpha + \sin \alpha}$;

2) $\frac{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}{\cos 2\alpha - \cos \alpha \cos 3\alpha}$.

8. Знайдіть головний період функції:

1) $f(x) = 2 \sin 3x \sin x$.

2) $f(x) = \cos 2x \cos 3x$.

9. Спростіть вираз:

1) $\sin x \sin y \sin z$; 2) $\cos x \cos y \cos z$; 3) $\sin^2 x \cos 4x$; 4) $\cos^2 2x \sin 3x$.

10. Доведіть тотожність:

1) $\sin^2 x + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{1}{4}$; 2) $4 \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 3 - 4 \sin^2 x$.

11. Спростіть вираз:

1) $(\sin x - \sin y)(\sin x + \sin y) - \sin(x - y) \sin(x + y)$;

2) $\sin^2(x + y) + \sin^2(x - y) + \sin 2x \sin 2y$.

12. Розкладіть на множники:

1) $\cos 3x \cos 5x + \sin x \sin 7x$;

2) $\sin 4x \cos 3x + \cos 2x \cos x - \sin 5x \cos 2x$.

Рівень С

1. Знайдіть $\sin 2\alpha \cos 5\alpha - \sin \alpha \cos 6\alpha$, якщо $\sin \alpha = a$.

2. Обчисліть:

1) $\cos \frac{\pi}{24} \cos \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{7\pi}{16} \sin \frac{5\pi}{24}$;

2) $\sin \frac{7\pi}{16} \sin \frac{3\pi}{8} \sin \frac{7\pi}{24} \sin \frac{\pi}{16} \sin \frac{\pi}{24}$.

3. Обчисліть:

1) $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$;

2) $\cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7}$.

4. Доведіть тотожність:

1) $\sin^2 x - \cos^2(y-x) + 2\cos x \cos y \cos(x-y) = \cos^2 y$;

2) $\cos^2 x + \cos^2 y - \sin^2(x+y) = 2\cos x \cos y \cos(x+y)$.

5. Доведіть тотожність $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \dots + \sin n\alpha = \frac{\sin \frac{n\alpha}{2} \sin \frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$.

6. Знайдіть головний період функції:

1) $f(x) = 4\sin^2 5x - \cos x \sin 3x$;

2) $y = 5\sin^2 3x - 2\sin x \cos^2 x$.

VIII. Рефлексія (1 хв)

1) Я сьогодні навчився/навчилась

.....

2) Мені здалося цікавим

.....

3) У мене залишилися запитання щодо

.....

4) Мені потрібно більше працювати над

.....

Можливі теми проєктів

1. Використання формул перетворення добутку тригонометричних функцій у суму при амплітудній модуляції.

2. Використання формул тригонометрії у програмуванні.

3. Обробка сигналів та формули тригонометрії.

4. Створення лепбука «Формули тригонометрії».

5. Роль формул перетворення добутку тригонометричних функцій у суму в математичному аналізі.