

Тема 2.

Співвідношення між тригонометричними функціями

Урок 15. Урок–практикум. Застосування формул перетворення добутку тригонометричних функцій у суму

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) застосовувати формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму для спрощення виразів;
- 2) застосовувати формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму для доведення тотожностей;
- 3) доводити тотожності та нерівності для кутів трикутника;
- 4) використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Спростіть вираз $\frac{\sin 6\alpha}{\sin 2\alpha} + \frac{\cos(6\alpha - \pi)}{\cos 2\alpha}$.
2. Спростіть вираз $(\cos 8\alpha \operatorname{tg} 4\alpha - \sin 8\alpha)(\cos 8\alpha \operatorname{Atg} 4\alpha + \sin 8\alpha)$.
3. Знайдіть значення виразу $\frac{\sin 35^\circ + \sin 85^\circ}{\cos 25^\circ}$.
4. Знайдіть область значень функції $y = 12 \sin x + 5 \cos x$.
5. Знайдіть головний період функції $y = 2 \sin \frac{4}{7} \pi x$.

V. Доведення тотожностей та нерівностей для кутів трикутника

Уведемо позначення, які будемо використовувати в тотожностях і нерівностях для кутів трикутника. Сторони, що лежать навпроти кутів A , B і C будемо позначати відповідно a , b і c .

Тригонометричні тотожності та нерівності для кутів трикутника цікавий і важливий розділ планіметрії. Багато з них відображають важливі геометричні факти. Візьмо, наприклад, нерівність $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Звідси $2R \sin A + 2R \sin B + 2R \sin C \leq 3\sqrt{3}R$, де R — радіус кола, описаного навколо трикутника ABC .

За теоремою синусів, $a + b + c \leq 3\sqrt{3}R$ або $P \leq 3\sqrt{3}R$, де P — периметр трикутника ABC . Остання нерівність означає, що з усіх трикутників, вписаних в коло, найбільший периметр має рівносторонній трикутник.

Наведемо деякі опорні тотожності для кутів трикутника.

1) $\sin(A + B) = \sin C$; $\cos(A + B) = -\cos C$; $\operatorname{tg}(A + B) = -\operatorname{tg} C$; $\operatorname{ctg}(A + B) = -\operatorname{ctg} C$.

2) $\sin\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \cos \frac{C}{2}$; $\cos\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \sin \frac{C}{2}$; $\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$; $\operatorname{ctg}\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \operatorname{tg} \frac{C}{2}$.

3) $\sin(2A + 2B) = -\sin 2C$; $\cos(2A + 2B) = \cos 2C$.

Тотожності 1) – 3) легко довести за формулами зведення.

Важливим є також використання теорем синусів та косинусів.

4) **Теорема синусів**: $a = 2R \sin A$; $b = 2R \sin B$; $c = 2R \sin C$.

5) **Наслідок теореми косинусів**: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$; $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$;

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Приклад 5. Доведіть тотожність $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$, де $p = \frac{a+b+c}{2}$ — півпериметр трикутника ABC .

$$\begin{aligned} \text{Доведення. } \sin \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{2}} = \sqrt{\frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc}} = \\ &= \sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \text{ що й треба було довести.} \end{aligned}$$

Примітка. Запропонуйте учням/ученицям, використовуючи ідею використану в ілюстративному прикладі 12, довести тотожності:

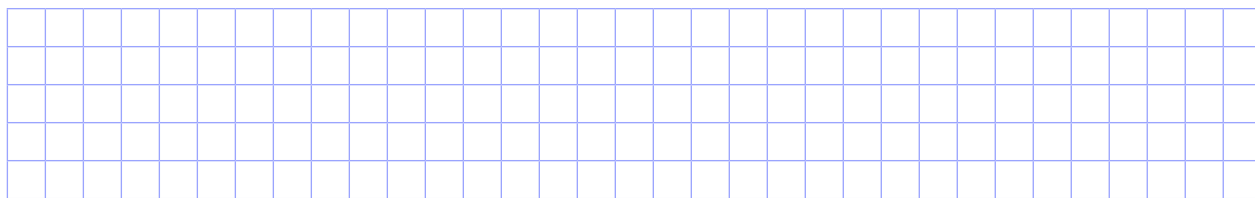
$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}, \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}, \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}.$$

Тригонометричні тотожності для кутів трикутника мають властивість циклічності: якщо замінити A на B , B на C і C на A , то тотожність залишиться правильною.

Наприклад, $\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$, $\cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$, тощо.

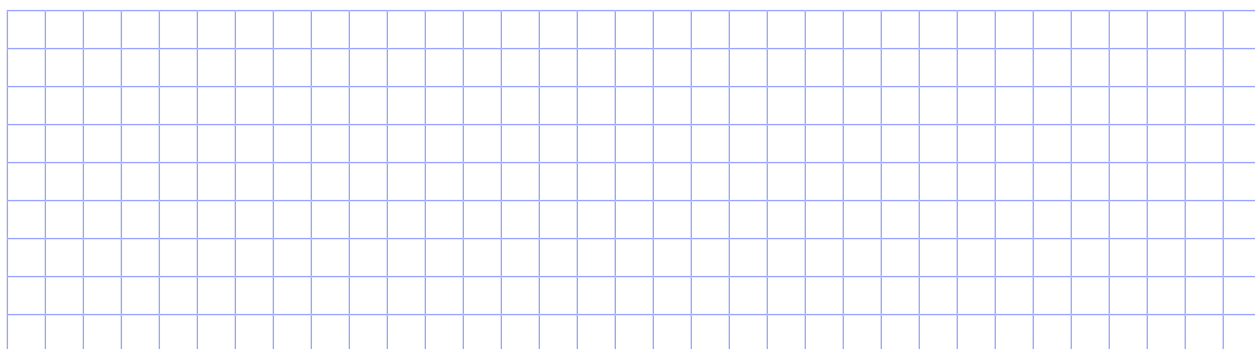
Приклад 6. Для кутів трикутника доведіть тотожність

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}.$$



Приклад 7. Для кутів трикутника доведіть тотожність

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}.$$



VI. Розв'язування дослідницьких задач

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Дослідницька задача. Доведіть, що з усіх трикутників, описаних навколо кола, найменший периметр має рівносторонній трикутник.

Задача 2. Олімпіадна задача. Доведіть, що $\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Перетворіть добуток у суму:

1) $\sin 23^\circ \sin 32^\circ$; 2) $\sin 14^\circ \cos 16^\circ$; 3) $\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{8}$; 4) $2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{5}$.

2. Перетворіть добуток у суму:

1) $4 \sin 10^\circ \cos 50^\circ \cos 40^\circ$; 2) $4 \cos 15^\circ \sin 15^\circ \sin 100^\circ$.

3. Обчисліть $\sin(60^\circ + \alpha) \sin(60^\circ - \alpha)$, якщо $\cos 2\alpha = \frac{1}{8}$.

4. Доведіть тотожність:

1) $2 \sin x \sin 2x + \cos 3x = \cos x$; 2) $2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{12} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{12} \right) = \sin \alpha - \sin \frac{\pi}{6}$.

- 5.** Доведіть тотожність:
 1) $\cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 4\alpha \sin \alpha = \cos 3\alpha \cos 2\alpha$;
 2) $\sin 1^\circ + \sin 91^\circ + 2\sin 203^\circ (\sin 112^\circ + \sin 158^\circ) = 0$.
- 6.** Для кутів трикутника доведіть тотожність:
 1) $\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$;
 2) $\operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{ctg} C + \operatorname{ctg} C \cdot \operatorname{ctg} A = 1$.

Рівень В

- 1.** Перетворіть добуток у суму:
 1) $\sin \alpha \cos 3\alpha \cos 4\alpha$; 2) $\cos 3\alpha \cos 5\alpha \cos 7\alpha$.
- 2.** Доведіть тотожність:
 1) $4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \left(30^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left(60^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = \sin \frac{3\alpha}{2}$;
 2) $\cos 55^\circ \cos 65^\circ \cos 175^\circ = -\frac{1+\sqrt{3}}{8\sqrt{2}}$.
- 3.** Спростіть вираз:
 1) $\cos 2\alpha + 2 \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{6} \right)$; 2) $\sin \alpha - 2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} - 15^\circ \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} + 15^\circ \right)$.
- 4.** Для кутів трикутника доведіть тотожність:
 1) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$;
 2) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$.
- 5.** Для кутів трикутника доведіть нерівність:
 1) $\sin A \cdot \sin B + \sin B \cdot \sin C + \sin C \cdot \sin A \leq \frac{9}{4}$;
 2) $(\sin A + \sin B)(\sin B + \sin C)(\sin C + \sin A) \leq 3\sqrt{3}$.
- 6.** Доведіть тотожність:
 1) $\frac{\sin 5\alpha - 2 \sin 3\alpha \cdot \cos 3\alpha}{1 - \cos 5\alpha - 2 \sin^2 3\alpha} = \operatorname{ctg} 5,5\alpha$; 2) $\frac{2 \cos^2 2\beta + \cos 5\beta - 1}{\sin 5\beta + 2 \cos 2\beta \sin 2\beta} = \operatorname{ctg} 4,5\beta$.
- 7.** Перетворіть добуток у суму:
 1) $8 \sin 9^\circ \cos 4^\circ \cos 2^\circ \cos 1^\circ$; 2) $4 \sin \alpha \sin 2\alpha \sin 3\alpha \sin 4\alpha$.
- 8.** Доведіть тотожність:
 1) $1 + 2 \cos 7\alpha = \frac{\sin 10,5\alpha}{\sin 3,5\alpha}$; 2) $1 - 2 \cos 2\alpha + 2 \cos 4\alpha - 2 \cos 6\alpha = -\frac{\cos 7\alpha}{\cos \alpha}$.
- 9.** Для кутів трикутника доведіть нерівність:
 1) $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq 1,5$; 2) $\frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\gamma}{2}} \geq 6$;
- 10.** Доведіть тотожність $\cos^2(45^\circ - \alpha) - \cos^2(60^\circ + \alpha) - \cos 75^\circ \sin(75^\circ - 2\alpha) = \sin 2\alpha$.
- 11.** Для кутів трикутника доведіть тотожність:
 1) $4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$; 2) $4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = \sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma$.

12. Доведіть тотожність:

1) $\sin \frac{9\pi}{28} \cos \frac{5\pi}{28} - \sin \frac{6\pi}{35} \cos \frac{\pi}{35} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{5};$

2) $\cos \frac{3\pi}{16} \cos \frac{\pi}{16} - \cos \frac{5\pi}{16} \sin \frac{3\pi}{16} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$

Рівень С

1. Спростіть вираз:

1) $(\sin x - \sin y)(\sin x + \sin y) - \sin(x - y) \sin(x + y);$

2) $\sin^2(x + y) + \sin^2(x - y) + \sin 2x \sin 2y;$

3) $\frac{\sqrt{3}}{2 \cos \frac{\pi}{12}} \left(\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + x \right) - \cos^2 \left(\frac{\pi}{6} - x \right) \right) + 2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} \sin \left(\frac{5\pi}{12} - 2x \right);$

4) $\frac{\sin 4x + \sin 3x}{2 \sin x} - \cos x - \cos 2x - \cos 3x.$

2. Для кутів трикутника доведіть нерівність:

1) $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta + \sin \gamma} + \frac{\sin \alpha}{\sin \beta + \sin \gamma} + \frac{\sin \alpha}{\sin \beta + \sin \gamma} \geq \frac{3}{2};$

2) $(\sin \alpha + \sin \beta)(\sin \alpha + \sin \gamma)(\sin \gamma + \sin \beta) \geq 8 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$

3. Доведіть тотожність:

1) $\frac{\cos^2(225^\circ + x) - \cos^2(210^\circ - x) + \sin 15^\circ \sin(75^\circ - 2x)}{\sin^2(135^\circ - x) - \sin^2(210^\circ - x) - \sin 195^\circ \cos(165^\circ - 2x)} = 1;$

2) $\sin x \cos 3x - \sin 3x \cos x + \frac{3}{2} \sin 2x - \frac{2}{3} \sin^3 2x = 0,5 \sin 6x.$

4. Для кутів трикутника доведіть тотожність:

1) $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma;$

2) $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$

5. Для кутів трикутника доведіть нерівність:

1) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \geq \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma;$

2) $\cos \frac{\alpha}{2} < \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2}.$

6. Знайдіть суму:

1) $\cos \alpha + \cos(\alpha + \varphi) + \cos(\alpha + 2\varphi) + \dots + \cos(\alpha + n\varphi);$

2) $\sin \alpha + \sin(\alpha + \varphi) + \sin(\alpha + 2\varphi) + \dots + \sin(\alpha + n\varphi).$

Рефлексія

Оцініть розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Жахливі Чудові

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася, або у вас усе ще залишилися запитання.

- 1)
.....
.....
- 2)
.....
.....
- ?
.....
.....

Можливі теми проєктів

- 1.** Доведення тотожностей для кутів трикутника та їхній геометричний зміст.
- 2.** Оптимізація обчислень значень тригонометричних виразів за допомогою формул перетворення добутку тригонометричних функцій у суму.
- 3.** Практичне застосування формул перетворення добутку тригонометричних функцій у суму в цифровій обробці сигналів.
- 4.** Перетворення добутку тригонометричних функцій у суму як інструмент доведення тотожностей.

