

11

Тема 2. Співвідношення між тригонометричними функціями

Урок 15. Урок–практикум. Застосування формул перетворення добутку тригонометричних функцій у суму

Тип уроку: урок формування вмінь і навичок.

План уроку

1. Спрощення та перетворення виразів.
2. Доведення тотожностей.
3. Доведення тотожностей та нерівностей для кутів трикутника.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

висловлює власне ставлення до здобутої інформації та нові ідеї, які виникли в результаті аналізу інформаційних джерел, наводить контраргументи [12 МАО 1.2.1–2 П];

виявляє ініціативу, пропонує та обґрунтовує ідеї щодо способу розв'язання специфічних проблемних ситуацій [12 МАО 2.2.1–1 П];

визначає необхідність і достатність набору даних проблемної ситуації та математичних фактів для її розв'язання [12 МАО 3.1.1–2 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.

5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.

6) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чи можна за тригонометричними тотожностями знайти співвідношення між сторонами й кутами трикутника?

2) Чи сприяють тригонометричні тотожності в обчисленні кутів трикутників і чотирикутників в задачах навігації та геодезії?

3) Яку роль відіграють тригонометричні нерівності в задачах на мінімум і максимум у трикутниках?

4) Чи допомагають формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму при аналізі звукових коливань?

5) Як формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму дозволяють обчислювати суму скінченної кількості тригонометричних функцій, аргументи яких утворюють арифметичну прогресію?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Спростіть вираз $\frac{\sin 6\alpha}{\sin 2\alpha} + \frac{\cos(6\alpha - \pi)}{\cos 2\alpha}$.

Відповідь. 2.

2. Спростіть вираз $(\cos 8\alpha \operatorname{tg} 4\alpha - \sin 8\alpha)(\cos 8\alpha \operatorname{Atg} 4\alpha + \sin 8\alpha)$.

Відповідь. -1.

3. Знайдіть значення виразу $\frac{\sin 35^\circ + \sin 85^\circ}{\cos 25^\circ}$.

Відповідь. $\sqrt{3}$.

4. Знайдіть область значень функції $y = 12 \sin x + 5 \cos x$.

Відповідь. $[-13; 13]$.

5. Знайдіть головний період функції $y = 2 \sin \frac{4}{7} \pi x$.

Відповідь. 3,5.

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Дослідницька задача. Доведіть, що з усіх трикутників, описаних навколо кола, найменший периметр має рівносторонній трикутник.

Задача 2. Олімпіадна задача. Доведіть, що $\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

III. Спрощення та перетворення виразів

Нагадаємо формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)),$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)),$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)).$$

Ілюстративні приклади

6. Перетворіть $\sin^4 \alpha \cos^2 \alpha$ у суму.

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання. } \sin^4 \alpha \cos^2 \alpha &= \sin^2 \alpha (\sin \alpha \cos \alpha)^2 = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \cdot \frac{\sin^2 2\alpha}{4} = \\ &= \frac{1}{8} (1 - \cos 2\alpha) \frac{1 - \cos 4\alpha}{2} = \frac{1}{16} (1 - \cos 2\alpha - \cos 4\alpha + \cos 2\alpha \cos 4\alpha) = \\ &= \frac{1}{16} \left(1 - \cos 2\alpha - \cos 4\alpha + \frac{\cos 6\alpha + \cos 2\alpha}{2} \right) = \frac{1}{16} - \frac{\cos 2\alpha}{32} - \frac{\cos 4\alpha}{16} + \frac{\cos 6\alpha}{32}. \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь. } \frac{1}{16} - \frac{\cos 2\alpha}{32} - \frac{\cos 4\alpha}{16} + \frac{\cos 6\alpha}{32}.$$

7. Обчисліть: $\sin 13^\circ \cos 3^\circ - \sin 5^\circ \sin 85^\circ - \cos 8^\circ \cos 82^\circ$.

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання. } \sin 13^\circ \cos 3^\circ - \sin 5^\circ \sin 85^\circ - \cos 8^\circ \cos 82^\circ &= \\ &= \frac{1}{2} (\sin 16^\circ + \sin 10^\circ - \cos 80^\circ + \cos 90^\circ - \cos 90^\circ - \cos 74^\circ) = \\ &= \frac{1}{2} (\sin 16^\circ + \sin 10^\circ - \sin 10^\circ + \cos 90^\circ - \cos 90^\circ - \sin 16^\circ) = 0. \end{aligned}$$

Відповідь. 0.

8. Спростіть вираз $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}$.

Розв'язання. $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{6} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)\sin\frac{\alpha}{2} =$
 $= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \cos\alpha\right)\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}\sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha = \frac{1}{4}\sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\left(\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\frac{3}{2}\alpha\right) =$
 $= \frac{1}{4}\sin\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\sin\frac{3}{2}\alpha = \frac{1}{4}\sin\frac{3}{2}\alpha.$
Відповідь. $\frac{1}{4}\sin\frac{3}{2}\alpha.$

IV. Доведення тотожностей

Нагадаємо основні способи доведення тотожностей:

- 1) перетворити праву частину рівності так, щоб довести, що вона дорівнює лівій;
- 2) перетворити ліву частину рівності так, щоб довести, що вона дорівнює правій;
- 3) перетворити праву й ліву частини рівностей й звести їх до рівних виразів;
- 4) обчислити різницю лівої й правої частин рівності, яка має дорівнювати 0;
- 5) знайти частку лівої й правої частин рівності, яка має дорівнювати одиниці, при цьому потрібно вилучати значення змінних, при яких вираз, на який виконується ділення, перетворюється в 0.

Ілюстративні приклади

9. Доведіть тотожність $\sin^2\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \frac{1}{4}.$

Доведення. $\sin^2\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} + \frac{1}{2}\left(\cos 2\alpha + \cos\frac{2\pi}{3}\right) =$
 $= \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\alpha}{2} + \frac{\cos 2\alpha}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$ що й треба було довести.

10. Доведіть тотожність $1 + 2\cos 2\alpha + 2\cos 4\alpha + 2\cos 6\alpha = \frac{\sin 7\alpha}{\sin \alpha}.$

Доведення. Розглянемо різницю лівої і правої частини даної рівності:

$$1 + 2\cos 2\alpha + 2\cos 4\alpha + 2\cos 6\alpha - \frac{\sin 7\alpha}{\sin \alpha} =$$

$$= \frac{\sin \alpha + 2\sin \alpha \cos 2\alpha + 2\sin \alpha \cos 4\alpha + 2\sin \alpha \cos 6\alpha - \sin 7\alpha}{\sin \alpha} =$$

$$= \frac{\sin \alpha - \sin \alpha + \sin 3\alpha - \sin 3\alpha + \sin 5\alpha - \sin 5\alpha + \sin 7\alpha - \sin 7\alpha}{\sin \alpha} = 0,$$

що й треба було довести.

11. Доведіть тотожність $\frac{\sin^2 3\alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 3\alpha - \cos 5\alpha \cdot \cos \alpha} = 2\cos 2\alpha.$

Доведення. $\frac{\sin^2 3\alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 3\alpha - \cos 5\alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{(\sin 3\alpha - \sin \alpha)(\sin 3\alpha + \sin \alpha)}{\cos^2 3\alpha - \cos 5\alpha \cdot \cos \alpha} =$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\sin 3\alpha - \sin \alpha)(\sin 3\alpha + \sin \alpha)}{\cos^2 3\alpha - \frac{1}{2}(\cos 6\alpha + \cos 4\alpha)} = \frac{2\sin 2\alpha \cdot \cos \alpha \cdot 2\sin \alpha \cdot \cos 2\alpha}{\frac{1}{2}(1 + \cos 6\alpha) - \frac{1}{2}\cos 6\alpha - \frac{1}{2}\cos 4\alpha} = \\
&= \frac{2\sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \sin 2\alpha}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 6\alpha - \frac{1}{2}\cos 6\alpha - \frac{1}{2}\cos 4\alpha} = \frac{2\sin^2 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4\alpha} = \frac{2\sin^2 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}{\frac{1}{2}(1 - \cos 4\alpha)} = \\
&= \frac{2\sin^2 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha} = 2\cos 2\alpha, \text{ що й треба було довести.}
\end{aligned}$$

V. Доведення тотожностей та нерівностей для кутів трикутника

Уведемо позначення, які будемо використовувати в тотожностях і нерівностях для кутів трикутника. Сторони, що лежать навпроти кутів A , B і C будемо позначати відповідно a , b і c .

Тригонометричні тотожності та нерівності для кутів трикутника цікавий і важливий розділ планіметрії. Багато з них відображають важливі геометричні факти. Візь-

мемо, наприклад, нерівність $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Звідси $2R\sin A + 2R\sin B + 2R\sin C \leq 3\sqrt{3}R$, де R — радіус кола, описаного навколо трикутника ABC .

За теоремою синусів, $a + b + c \leq 3\sqrt{3}R$ або $P \leq 3\sqrt{3}R$, де P — периметр трикутника ABC . Остання нерівність означає, що з усіх трикутників, вписаних в коло, найбільший периметр має рівносторонній трикутник.

Наведемо деякі опорні тотожності для кутів трикутника.

$$1) \sin(A + B) = \sin C; \cos(A + B) = -\cos C; \operatorname{tg}(A + B) = -\operatorname{tg} C; \operatorname{ctg}(A + B) = -\operatorname{ctg} C.$$

$$2) \sin\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \cos \frac{C}{2}; \cos\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \sin \frac{C}{2}; \operatorname{tg}\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \operatorname{ctg} \frac{C}{2}; \operatorname{ctg}\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

$$3) \sin(2A + 2B) = -\sin 2C; \cos(2A + 2B) = \cos 2C.$$

Тотожності 1) – 3) легко довести за формулами зведення.

Важливим є також використання теорем синусів та косинусів.

$$4) \text{ **Теорема синусів**: } a = 2R\sin A; b = 2R\sin B; c = 2R\sin C.$$

$$5) \text{ **Наслідок теореми косинусів**: } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Ілюстративні приклади

12. Доведіть тотожність $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$, де $p = \frac{a+b+c}{2}$ — півпериметр трикутника ABC .

$$\text{Доведення. } \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{2}} = \sqrt{\frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \text{ що й треба було довести.}$$

Примітка. Запропонуйте учням/ученицям, використовуючи ідею використану в ілюстративному прикладі 12, довести тотожності:

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}, \quad \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}, \quad \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}.$$

Тригонометричні тотожності для кутів трикутника мають властивість циклічності: якщо замінити A на B , B на C і C на A , то тотожність залишиться правильною.

Наприклад, $\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}, \quad \cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}},$ тощо.

- 13.** Для кутів трикутника доведіть тотожність $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}.$

Доведення. I спосіб. $\sin A + \sin B + \sin C = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} + \sin(A+B) =$
 $= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A+B}{2} = 2 \sin \frac{A+B}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) =$
 $= 4 \cos \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2},$ що й треба було довести.

II спосіб. $4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} = 4 \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \cdot \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \cdot \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} =$
 $= 4 \frac{p \cdot S}{abc} = \frac{p}{R} = \frac{a+b+c}{2R} = \sin A + \sin B + \sin C,$ що й треба було довести.

- 14.** Для кутів трикутника доведіть тотожність

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}.$$

Доведення. $\cos A + \cos B + \cos C - 1 = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} - 2 \sin^2 \frac{C}{2} =$
 $= 2 \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} - 2 \sin^2 \frac{C}{2} = 2 \sin \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right) = 4 \sin \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2},$
що й треба було довести.

- 15.** Для кутів гострокутного трикутника доведіть тотожність

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C.$$

Доведення. $\operatorname{tg}(A+B) = -\operatorname{tg} C = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B},$

$-\operatorname{tg} C + \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B, \quad \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C,$
що й треба було довести.

- 16.** Для кутів трикутника доведіть нерівність $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \geq \frac{3}{4}.$

Доведення. Оскільки $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2} \right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right) = \pi,$ то для кутів трикутника

$\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$ застосуємо нерівність $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \frac{3}{4}:$

$\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) \geq \frac{3}{4}$, $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \geq \frac{3}{4}$, що й треба було довести.

17. Для кутів трикутника доведіть нерівність $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Доведення. Нехай $M = \sin A + \sin B + \sin C$. Тоді $M^2 = (\sin A + \sin B + \sin C)^2 =$
 $= \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C + 2(\sin A \cdot \sin B + \sin B \cdot \sin C + \sin C \cdot \sin A) \leq$
 $\leq 3(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) \leq 3 \cdot \frac{9}{4} = \frac{27}{4}$.

Отже, $M \leq \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, що й треба було довести.

При доведенні використано нерівність трьох квадратів, згідно з якою $\sin A \cdot \sin B + \sin B \cdot \sin C + \sin C \cdot \sin A \leq \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$

і нерівність $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \geq \frac{3}{4}$.

VI. Розв'язування дослідницьких задач. Групова активність (7–8 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Дослідницька задача. Доведіть, що з усіх трикутників, описаних навколо кола, найменший периметр має рівносторонній трикутник.

Доведення. Запишемо $p = \frac{a+b+c}{2} = R(\sin A + \sin B + \sin C) = 4R \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}$.

$$r = \frac{2S}{p} = \frac{ab \sin C}{a+b+c} = \frac{4R^2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}{2R(\sin A + \sin B + \sin C)} =$$

$$= \frac{2R \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}{4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}} = 4R \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}.$$

$$4R \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} = r \frac{\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}} = r \cdot \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2}.$$

Відомо, що $\operatorname{ctg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \geq 3\sqrt{3}$, тому $p \geq 3\sqrt{3}r$.

Отже, найменший периметр має рівносторонній трикутник.

Задача 2. Олімпіадна задача. Доведіть, що $\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

Доведення. Уведемо позначення $x = \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7}$. Оскільки $\frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}$ — кути, що лежать в першій координатній чверті, то $\cos \frac{\pi}{7} > 0, \cos \frac{2\pi}{7} > 0, \cos \frac{3\pi}{7} > 0$.

$$\frac{\pi}{7} < \frac{2\pi}{7}.$$

Отже, $\cos \frac{\pi}{7} > \cos \frac{2\pi}{7}$ тому, що функція $y = \cos x$ спадає на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Звідси $\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} > 0$. Тому $x > 0$.

Обчислимо значення виразу $2x^2 - x$.

$$\begin{aligned} & 2\left(\cos^2 \frac{\pi}{7} + \cos^2 \frac{2\pi}{7} + \cos^2 \frac{3\pi}{7} - 2\cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} + 2\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} - 2\cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7}\right) - \\ &= -\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} - \cos \frac{3\pi}{7} = 1 + \cos \frac{2\pi}{7} + 1 + \cos \frac{4\pi}{7} + 1 + \cos \frac{6\pi}{7} - \\ &- 2\left(\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7}\right) + 2\left(\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7}\right) - 2\left(\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7}\right) - \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} - \cos \frac{3\pi}{7} = \\ &= 1 + \cos \frac{2\pi}{7} + 1 - \cos \frac{3\pi}{7} + 1 - \cos \frac{\pi}{7} - 2\cos \frac{\pi}{7} - 2\cos \frac{3\pi}{7} + 2\cos \frac{2\pi}{7} - 2\cos \frac{3\pi}{7} - \\ &- 2\cos \frac{\pi}{7} + 2\cos \frac{2\pi}{7} - \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} - \cos \frac{3\pi}{7} = 3 - 6\cos \frac{\pi}{7} + 6\cos \frac{2\pi}{7} - 6\cos \frac{3\pi}{7} = \\ &= 3 - 6\left(\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7}\right). \end{aligned}$$

Маємо: $2x^2 - x = 3 - 6x, 2x^2 + 5x - 3 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -3$ — не задовольняє умову задачі.

Отже, $\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$, що й треба було довести.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Перетворіть добуток у суму:

$$1) \sin 23^\circ \sin 32^\circ; \quad 2) \sin 14^\circ \cos 16^\circ; \quad 3) \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{8}; \quad 4) 2\sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{5}.$$

2. Перетворіть добуток у суму:

$$1) 4\sin 10^\circ \cos 50^\circ \cos 40^\circ; \quad 2) 4\cos 15^\circ \sin 15^\circ \sin 100^\circ.$$

3. Обчисліть $\sin(60^\circ + \alpha)\sin(60^\circ - \alpha)$, якщо $\cos 2\alpha = \frac{1}{8}$.

4. Доведіть тотожність:

$$1) 2\sin x \sin 2x + \cos 3x = \cos x; \quad 2) 2\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = \sin \alpha - \sin \frac{\pi}{6}.$$

5. Доведіть тотожність:

1) $\cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 4\alpha \sin \alpha = \cos 3\alpha \cos 2\alpha;$

2) $\sin 1^\circ + \sin 91^\circ + 2 \sin 203^\circ (\sin 112^\circ + \sin 158^\circ) = 0$.

6. Для кутів трикутника доведіть тотожність:

$$1) \operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2};$$

2) $\operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{ctg} C + \operatorname{ctg} C \cdot \operatorname{ctg} A = 1$.

Рівень В

1. Перетворіть добуток у суму:

1) $\sin \alpha \cos 3\alpha \cos 4\alpha$;

2) $\cos 3\alpha \cos 5\alpha \cos 7\alpha$.

2. Доведіть тотожність:

$$1) \ 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \left(30^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left(60^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = \sin \frac{3\alpha}{2};$$

$$2) \cos 55^\circ \cos 65^\circ \cos 175^\circ = -\frac{1+\sqrt{3}}{8\sqrt{2}}.$$

3. Спростіть вираз:

$$1) \cos 2\alpha + 2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right);$$

$$2) \sin \alpha - 2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} - 15^\circ \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} + 15^\circ \right).$$

4. Для кутів трикутника доведіть тотожність:

$$1) \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C;$$

$$2) \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C.$$

5. Для кутів трикутника доведіть нерівність:

$$1) \sin A \cdot \sin B + \sin B \cdot \sin C + \sin C \cdot \sin A \leq \frac{9}{4};$$

$$2) (\sin A + \sin B)(\sin B + \sin C)(\sin C + \sin A) \leq 3\sqrt{3}.$$

6. Доведіть тотожність:

$$1) \frac{\sin 5\alpha - 2 \sin 3\alpha \cdot \cos 3\alpha}{1 - \cos 5\alpha - 2 \sin^2 3\alpha} = \operatorname{ctg} 5,5\alpha;$$

$$2) \frac{2 \cos^2 2\beta + \cos 5\beta - 1}{\sin 5\beta + 2 \cos 2\beta \sin 2\beta} = \operatorname{ctg} 4,5\beta.$$

7. Перетворіть добуток у суму:

1) $8\sin 9^\circ \cos 4^\circ \cos 2^\circ \cos 1^\circ$;

2) $4 \sin \alpha \sin 2\alpha \sin 3\alpha \sin 4\alpha$.

8. Доведіть тотожність:

$$1) \ 1 + 2\cos 7\alpha = \frac{\sin 10,5\alpha}{\sin 3,5\alpha};$$

$$2) 1 - 2\cos 2\alpha + 2\cos 4\alpha - 2\cos 6\alpha = -\frac{\cos 7\alpha}{\cos \alpha}.$$

9. Для кутів трикутника доведіть нерівність:

$$1) \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq 1,5;$$

$$2) \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\gamma}{2}} \geq 6;$$

10. Доведіть тотожність $\cos^2(45^\circ - \alpha) - \cos^2(60^\circ + \alpha) - \cos 75^\circ \sin(75^\circ - 2\alpha) = \sin 2\alpha$.

11. Для кутів трикутника доведіть тотожність:

$$1) \ 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma; \quad 2) \ 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = \sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma.$$

12. Доведіть тотожність:

1) $\sin \frac{9\pi}{28} \cos \frac{5\pi}{28} - \sin \frac{6\pi}{35} \cos \frac{\pi}{35} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{5};$

2) $\cos \frac{3\pi}{16} \cos \frac{\pi}{16} - \cos \frac{5\pi}{16} \sin \frac{3\pi}{16} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$

Рівень С

1. Спростіть вираз:

1) $(\sin x - \sin y)(\sin x + \sin y) - \sin(x - y) \sin(x + y);$

2) $\sin^2(x + y) + \sin^2(x - y) + \sin 2x \sin 2y;$

3) $\frac{\sqrt{3}}{2 \cos \frac{\pi}{12}} \left(\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + x \right) - \cos^2 \left(\frac{\pi}{6} - x \right) \right) + 2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} \sin \left(\frac{5\pi}{12} - 2x \right);$

4) $\frac{\sin 4x + \sin 3x}{2 \sin x} - \cos x - \cos 2x - \cos 3x.$

2. Для кутів трикутника доведіть нерівність:

1) $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta + \sin \gamma} + \frac{\sin \alpha}{\sin \beta + \sin \gamma} + \frac{\sin \alpha}{\sin \beta + \sin \gamma} \geq \frac{3}{2};$

2) $(\sin \alpha + \sin \beta)(\sin \alpha + \sin \gamma)(\sin \gamma + \sin \beta) \geq 8 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$

3. Доведіть тотожність:

1) $\frac{\cos^2(225^\circ + x) - \cos^2(210^\circ - x) + \sin 15^\circ \sin(75^\circ - 2x)}{\sin^2(135^\circ - x) - \sin^2(210^\circ - x) - \sin 195^\circ \cos(165^\circ - 2x)} = 1;$

2) $\sin x \cos 3x - \sin 3x \cos x + \frac{3}{2} \sin 2x - \frac{2}{3} \sin^3 2x = 0,5 \sin 6x.$

4. Для кутів трикутника доведіть тотожність:

1) $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma;$

2) $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$

5. Для кутів трикутника доведіть нерівність:

1) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \geq \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma;$

2) $\cos \frac{\alpha}{2} < \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2}.$

6. Знайдіть суму:

1) $\cos \alpha + \cos(\alpha + \varphi) + \cos(\alpha + 2\varphi) + \dots + \cos(\alpha + n\varphi);$

2) $\sin \alpha + \sin(\alpha + \varphi) + \sin(\alpha + 2\varphi) + \dots + \sin(\alpha + n\varphi).$

VIII. Рефлексія (1–2 хв)

Запропонуйте учням оцінити розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Жахливі									Чудові

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася, або у вас усе ще залишилися запитання.

- 1)
.....
.....
- 2)
.....
.....
- ?
.....
.....

Можливі теми проєктів

- 1.** Доведення тотожностей для кутів трикутника та їхній геометричний зміст.
- 2.** Оптимізація обчислень значень тригонометричних виразів за допомогою формул перетворення добутку тригонометричних функцій у суму.
- 3.** Практичне застосування формул перетворення добутку тригонометричних функцій у суму в цифровій обробці сигналів.
- 4.** Перетворення добутку тригонометричних функцій у суму як інструмент доведення тотожностей.