

Тема 2.

Співвідношення між тригонометричними функціями

Урок 16. Розв'язування завдань із застосуванням формул тригонометрії

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) спрощувати тригонометричні вирази, використовуючи різні формули тригонометрії;
- 2) доводити тригонометричні тотожності, використовуючи різні формули тригонометрії;
- 3) використовувати набуті знання для розв'язування олімпіадних та дослідницьких задач.

II. Повторення

1. Чому дорівнює значення виразу $3 \operatorname{tg} 7\alpha \operatorname{ctg} 7\alpha - 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$, якщо $\sin \alpha = 0,25$?
2. Спростіть вираз $\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$.
3. Спростіть вираз $(1 + \cos(2\pi - 2\alpha)) \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$.
4. Спростіть вираз $\frac{1 - \operatorname{ctg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \beta}$.
5. Спростіть вираз $\frac{\sin 5\alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \cos 5\alpha}$.

III. Спростення та перетворення виразів

Приклад 1.

[illegible]

Приклад 2.

[illegible]

Приклад 3.

[illegible]

IV. Доведення тригонометричних тотожностей

Приклад 4

$$\frac{\left(\sin(\pi-3\alpha)-\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\right)\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+3\alpha\right)+\cos(\pi+\alpha)\right)}{1+\cos(\pi-2\alpha)}$$

[illegible]

Приклад 5.

[illegible]

V. Розв'язування олімпіадних задач

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Олімпіадна задача. Доведіть, що для довільних додатних чисел a, b, c виконується нерівність $ab + bc + ca \leq 1 + \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}$.

Задача 2. Олімпіадна задача. Доведіть, що для будь яких дійсних чисел $a, b \in [-1; 1]$ справджується нерівність $a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} \leq 1$.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Спростіть вираз:

$$1) \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 - 1 + \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}; \quad 2) \frac{\sin 2\alpha \cos 4\alpha (1 + \cos 2\alpha)}{(\sin 3\alpha + \sin \alpha)(\cos 3\alpha + \cos 5\alpha)}.$$

2. Спростіть вираз $1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2} - 3\pi\right) - \cos^2 \frac{\alpha}{4} + \sin^2 \frac{\alpha}{4}$.

3. Спростіть вираз:

$$1) \cos \alpha (1 + \cos^{-1} \alpha + \operatorname{tg} \alpha) (1 - \cos^{-1} \alpha + \operatorname{tg} \alpha);$$
$$2) \sin^2 \alpha (1 + \sin^{-1} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) (1 - \sin^{-1} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha).$$

4. Доведіть тотожність:

$$1) (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 = 4 \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2};$$
$$2) (\sin \alpha + \sin \beta)^2 + (\cos \alpha + \cos \beta)^2 = 4 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

5. Доведіть тотожність:

$$1) \frac{2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2 \sin 2\alpha + \sin 4\alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha; \quad 2) \frac{2 \cos 2\alpha - \sin 4\alpha}{2 \cos 2\alpha + \sin 4\alpha} = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right).$$

6. Доведіть тотожність:

$$1) 1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}; \quad 2) \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

Рівень В

1. Доведіть тотожність:

$$1) \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}; \quad 2) \frac{\cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha}{1 + 0,5 \sin 2\alpha} = \cos \alpha - \sin \alpha;$$
$$3) \frac{\sin 4\alpha \cdot \cos 2\alpha}{(1 + \cos 4\alpha)(1 + \cos 2\alpha)} = \operatorname{tg} \alpha; \quad 4) \frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha;$$

2. Доведіть тотожність $\sin^2\left(\frac{7\pi}{8} - 2\alpha\right) - \sin^2\left(\frac{9\pi}{8} - 2\alpha\right) = \frac{\sin 4\alpha}{\sqrt{2}}$.

3. Доведіть тотожність:

$$1) \cos^2 3\alpha + \cos^2 2\alpha = \cos 5\alpha \cdot \cos \alpha + 1; \quad 2) \sin \alpha \cdot \sin 3\alpha = \sin^2 2\alpha - \sin^2 \alpha.$$

4. Доведіть тотожність:

$$1) 8\cos^4 \alpha = 3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha; \quad 2) 8\sin^4 \alpha = 3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha.$$

5. Доведіть тотожність:

$$1) \frac{\cos\left(4\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{2} + 2\alpha\right)}{(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha)} = \operatorname{tg} \alpha;$$

$$2) \frac{\sin^2(\alpha - \pi) - 4\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right) - 4 + 4\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)} = \operatorname{tg}^4 \frac{\alpha}{2}.$$

6. Доведіть тотожність:

$$1) \sin \alpha(\sin \alpha + \sin \beta) + \cos \alpha(\cos \alpha + \cos \beta) = 2\cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$2) \sin \alpha(\sin \alpha - \sin \beta) + \cos \alpha(\cos \alpha - \cos \beta) = 2\sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

7. Спростіть вираз:

$$1) \frac{\cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha}{\sqrt{2}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)} - \frac{1}{2}\sin 2\alpha;$$

$$2) \frac{\cos^3 \alpha + \sin^3 \alpha}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)} + \frac{1}{2}\sin 2\alpha.$$

8. Знайдіть значення виразу:

$$1) \sin \frac{\pi}{11} \cdot \left(1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{22}\right) - \sin \frac{9\pi}{22} \cdot \cos \frac{9\pi}{22}; \quad 2) 2\cos \frac{\pi}{17} \cdot \left(2\cos^2 \frac{\pi}{34} - 1\right) + \cos \frac{19\pi}{17}.$$

9. Спростіть вираз:

$$1) \frac{32\cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \cos 8\alpha}{\sin 16\alpha}; \quad 2) \frac{\cos 3\alpha \cdot \cos 6\alpha \cdot \cos 12\alpha \cdot \cos 24\alpha}{\sin 48\alpha}.$$

10. Спростіть вираз:

$$1) \sin^2\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\alpha}{2}\right);$$

$$2) \frac{\sin(60^\circ + \alpha)}{4\sin\left(15^\circ + \frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(75^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)}.$$

11. Доведіть тотожність:

$$1) \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{tg}(\pi + \alpha)\cos(\pi + \alpha)\cos(2\pi - \alpha) = 0;$$

$$2) \sin(\alpha - 270^\circ)\cos(\alpha + 90^\circ)\operatorname{tg}(3\alpha - 180^\circ) = \cos(180^\circ - \alpha)\sin(180^\circ - \alpha)\operatorname{ctg}(90^\circ - 3\alpha).$$

12. Спростіть вираз:

$$1) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\operatorname{tg}(\pi - \alpha)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\sin(\pi - \alpha)};$$

$$2) \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)}{\cos(\pi - \alpha)\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right)} - \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos(2\pi - \beta)\operatorname{tg}(\pi - \alpha)}.$$

Рівень С

1. Доведіть тотожність:

$$1) (\cos \alpha + \cos \beta)^2 - (\sin \alpha + \sin \beta)^2 = 4 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \cos(\alpha + \beta);$$

$$2) (\cos \alpha - \cos 2\beta)^2 + (\sin \alpha + \sin 2\beta)^2 = 4 \sin^2 \frac{\alpha + 2\beta}{2}.$$

2. Спростіть вираз $\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} 2x + 4 \operatorname{tg} 4x + 8 \operatorname{tg} 8x + 16 \operatorname{tg} 16x + 32 \operatorname{ctg} 32x$.

3. Доведіть тотожність:

$$1) \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{tg} 2x - 4 \operatorname{tg} 4x = 8 \operatorname{ctg} 8x; \quad 2) \operatorname{tg} 9x - \operatorname{tg} 6x - \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 9x \operatorname{tg} 6x \operatorname{tg} 3x.$$

4. Доведіть тотожність:

$$1) \frac{\sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha}}{\sqrt{1 + \cos \alpha} - \sqrt{1 - \cos \alpha}} = \operatorname{ctg} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right), \text{ якщо } \pi < \alpha < 2\pi;$$

$$2) \frac{\sqrt{1 + \sin \alpha} + \sqrt{1 - \sin \alpha}}{\sqrt{1 + \sin \alpha} - \sqrt{1 - \sin \alpha}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \text{ якщо } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$$

5. Обчисліть:

$$1) \cos 73^\circ \cdot \cos 47^\circ + \cos^2 47^\circ + \cos^2 73^\circ;$$

$$2) 2 \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 30^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ.$$

6. Доведіть тотожність:

$$1) \frac{\operatorname{tg}^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} + \frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{ctg}^3 \alpha;$$

$$2) \frac{\cos^3 \alpha - \cos 3\alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin^3 \alpha + \sin 3\alpha}{\sin \alpha} = 3.$$

Рефлексія

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
- 4) Найскладнішим для мене було
- 5) Тепер я впевнений/впевнена у своїй здатності
- 6) Найбільше мені сподобалося

Можливі теми проєктів

1. Тригонометрична підстановка при доведенні нерівностей.
2. Алгоритмізація процесу спрощення тригонометричних виразів.
3. Аналіз спрощення тригонометричних виразів засобами штучного інтелекту.
4. Створення міні-програми для тренування алгоритмів спрощення тригонометричних виразів.
5. Дослідження та пошук «корисних» тригонометричних тотожностей, які не входять до шкільної програми.







