

11

Тема 2. Співвідношення між тригонометричними функціями

Урок 16. Розв'язування завдань із застосуванням формул тригонометрії

Тип уроку: урок формування вмінь і навичок.

План уроку

1. Робота над індивідуальними (груповими) проєктами.
2. Спрощення та перетворення виразів.
3. Доведення тригонометричних тотожностей.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

самостійно або у взаємодії з іншими виокремлює спільні ознаки специфічних проблемних ситуацій, для розв'язання яких можна застосувати подібні методи [12 МАО 1.1.2–1 П];

виявляє ініціативу, пропонує та обґрунтовує ідеї щодо способу розв'язання специфічних проблемних ситуацій [12 МАО 2.2.1–1 П];

аналізує спільні та відмінні риси різних моделей і шляхів розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Урок можна провести як урок підготовки учнівських проєктів. Можливі теми для створення проєктів запропоновані в кожному уроці змістової теми.
- 4) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.
- 5) Пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач і навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

6) Олімпіадні задачі розбирайте за умови сприйняття їх учнями й ученицями. Можна запропонувати олімпіадні задачі як теми учнівських проєктів.

7) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чому в математиці важливо вміти спрощувати складні вирази та доводити тотожності?

2) Чи допомагає спрощення виразів швидше розв'язати рівняння або нерівність?

3) Як ви гадаєте, в яких галузях людської діяльності спрощення тригонометричних виразів може бути корисним?

4) Чи бувають ситуації, в яких краще безпосередньо обчислити значення виразу і не спрощувати його?

5) Як можна навчитися бачити, яку формулу доцільніше використати при спрощенні виразів або доведенні тотожностей?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Чому дорівнює значення виразу $3 \operatorname{tg} 7\alpha \operatorname{ctg} 7\alpha - 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$, якщо $\sin \alpha = 0,25$?

Відповідь. 3,5.

2. Спростіть вираз $\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Відповідь. $\frac{2}{\cos \alpha}$.

3. Спростіть вираз $(1 + \cos(2\pi - 2\alpha)) \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$.

Відповідь. $-\sin 2\alpha$.

4. Спростіть вираз $\frac{1 - \operatorname{ctg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \beta}$.

Відповідь. $-\operatorname{ctg} \alpha$.

5. Спростіть вираз $\frac{\sin 5\alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \cos 5\alpha}$.

Відповідь. $\operatorname{tg} 2\alpha$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Олімпіадна задача. Доведіть, що для довільних додатних чисел a, b, c виконується нерівність $ab + bc + ca \leq 1 + \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}$.

Задача 2. Олімпіадна задача. Доведіть, що для будь яких дійсних чисел $a, b \in [-1; 1]$ справджується нерівність $a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} \leq 1$.

III. Спрощення та перетворення виразів

Ілюстративні приклади

6. Спростіть вираз $\left(\frac{1}{\cos 3\alpha} + \frac{1}{\cos \alpha}\right)\left(\frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{\cos \alpha}\right)$.

Розв'язання. Для спрощення виразу використаємо формулу перетворення суми косинусів у добуток, формули косинуса суми та синуса подвійного аргументу.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\cos 3\alpha} + \frac{1}{\cos \alpha}\right)\left(\frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{\cos \alpha}\right) &= \frac{\cos \alpha + \cos 3\alpha}{\cos 3\alpha \cos \alpha} \cdot \frac{\cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \\ &= \frac{2 \cos 2\alpha \cos \alpha}{\cos 3\alpha \cos \alpha} \cdot \frac{\cos 3\alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2 \cos 2\alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{4 \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = 4 \operatorname{ctg} 2\alpha. \end{aligned}$$

Відповідь. $4 \operatorname{ctg} 2\alpha$.

7. Спростіть вираз $\sin^2\left(\frac{15\pi}{8} - 2\alpha\right) - \cos^2\left(\frac{17\pi}{8} - 2\alpha\right)$.

Розв'язання. Для спрощення виразу використаємо формули пониження степеня та перетворення суми косинусів у добуток.

$$\begin{aligned} \sin^2\left(\frac{15\pi}{8} - 2\alpha\right) - \cos^2\left(\frac{17\pi}{8} - 2\alpha\right) &= \frac{1 - \cos\left(\frac{15\pi}{4} - 4\alpha\right)}{2} - \frac{1 + \cos\left(\frac{17\pi}{4} - 4\alpha\right)}{2} = \\ &= \frac{1 - \cos\left(\frac{15\pi}{4} - 4\alpha\right) - 1 - \cos\left(\frac{17\pi}{4} - 4\alpha\right)}{2} = -\frac{\cos\left(\frac{17\pi}{4} - 4\alpha\right) + \cos\left(\frac{15\pi}{4} - 4\alpha\right)}{2} = \\ &= -\cos(4\pi - 4\alpha) \cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\cos 4\alpha}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Відповідь. $-\frac{\cos 4\alpha}{\sqrt{2}}$.

8. Спростіть вираз $\sin^2 2\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha\right) \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$.

Розв'язання. Для спрощення виразу використаємо формулу пониження степеня для синуса, формулу перетворення добутку синуса та косинуса в суму, а також формулу синуса подвійного аргументу.

$$\begin{aligned}
& \sin^2 2\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha\right) \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \\
& = \frac{1 - \cos 4\alpha}{2} - \frac{1}{2} \left(\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2\alpha\right) + \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} - 2\alpha\right) \right) = \\
& = \frac{1}{2} \left(1 - \cos 4\alpha - \sin\left(4\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos 4\alpha + \cos 4\alpha - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Відповідь. $\frac{1}{4}$.

9. Спростіть вираз $\frac{1 - \cos(8\alpha - 3\pi)}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha}$.

Розв'язання. Для спрощення виразу використаємо формули зведення, формули синуса й косинуса подвійного аргументу.

$$\begin{aligned}
\frac{1 - \cos(8\alpha - 3\pi)}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha} &= \frac{1 - \cos(3\pi - 8\alpha)}{\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} - \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}} = \frac{(1 - \cos(3\pi - 8\alpha)) \sin 2\alpha \cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha - \cos^2 2\alpha} = \\
&= -\frac{(1 - \cos(3\pi - 8\alpha)) \cdot 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha}{2(\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha)} = -\frac{(1 + \cos 8\alpha) \sin 4\alpha}{2 \cos 4\alpha} = -\frac{(1 + 2 \cos^2 4\alpha - 1) \sin 4\alpha}{2 \cos 4\alpha} = \\
&= -\frac{2 \cos^2 4\alpha \sin 4\alpha}{2 \cos 4\alpha} = \frac{-2 \sin 4\alpha \cos 4\alpha}{2} = -\frac{\sin 8\alpha}{2}.
\end{aligned}$$

Відповідь. $-\frac{\sin 8\alpha}{2}$.

10. Спростіть вираз $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}\right) \sin \frac{\alpha}{2}$.

Розв'язання. Для спрощення виразу використаємо формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму, а також формули зведення.

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}\right) \sin \frac{\alpha}{2} &= \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{6} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \right) \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \cos \alpha \right) \sin \frac{\alpha}{2} = \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \cos \alpha \right) \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4} \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \alpha = \frac{1}{4} \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \left(\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right) + \sin \frac{3}{2} \alpha \right) = \\
&= \frac{1}{4} \sin \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \sin \frac{3}{2} \alpha = \frac{1}{4} \sin \frac{3}{2} \alpha.
\end{aligned}$$

Відповідь. $\frac{1}{4} \sin \frac{3}{2} \alpha$.

IV. Доведення тригонометричних тотожностей

Ілюстративні приклади

11. Доведіть тотожність
$$\frac{\left(\sin(\pi - 3\alpha) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)\right)\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + 3\alpha\right) + \cos(\pi + \alpha)\right)}{1 + \cos(\pi - 2\alpha)} = -\sin 4\alpha.$$

Доведення. Для доведення тотожності потрібно використати формули зведення, формули різниці синусів та косинусів, формули пониження степеня та формулу синуса подвійного аргументу.

Розглянемо ліву частину рівності:

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\sin(\pi - 3\alpha) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)\right)\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + 3\alpha\right) + \cos(\pi + \alpha)\right)}{1 + \cos(\pi - 2\alpha)} = \frac{(\sin 3\alpha - \sin \alpha)(\cos 3\alpha - \cos \alpha)}{1 - \cos 2\alpha} = \\ & = \frac{2\sin \frac{3\alpha - \alpha}{2} \cos \frac{3\alpha + \alpha}{2} \cdot \left(-2\sin \frac{3\alpha - \alpha}{2} \sin \frac{3\alpha + \alpha}{2}\right)}{2\sin^2 \alpha} = \frac{-4\sin \alpha \cos 2\alpha \sin \alpha \sin 2\alpha}{2\sin^2 \alpha} = \\ & = -2\sin 2\alpha \cos 2\alpha = -\sin 4\alpha, \text{ що й треба було довести.} \end{aligned}$$

12. Доведіть тотожність $(1 + \cos^{-1} 2\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha)(1 - \cos^{-1} 2\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha) = 2\operatorname{tg} 2\alpha.$

Доведення. При доведенні тотожності використаємо формули різниці квадратів та квадрата суми, основну тригонометричну тотожність, формулу синуса подвійного аргументу.

Розглянемо ліву частину рівності:

$$\begin{aligned} & (1 + \cos^{-1} 2\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha)(1 - \cos^{-1} 2\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha) = \left(1 + \frac{1}{\cos 2\alpha} + \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\right)\left(1 - \frac{1}{\cos 2\alpha} + \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\right) = \\ & = \frac{\cos 2\alpha + 1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos 2\alpha - 1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{((\cos 2\alpha + \sin 2\alpha) + 1)((\cos 2\alpha + \sin 2\alpha) - 1)}{\cos^2 2\alpha} = \\ & = \frac{(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)^2 - 1}{\cos^2 2\alpha} = \frac{\cos^2 2\alpha + 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha + \sin^2 2\alpha - 1}{\cos^2 2\alpha} = \frac{1 + 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha - 1}{\cos^2 2\alpha} = \\ & = \frac{2\sin 2\alpha \cos 2\alpha}{\cos^2 2\alpha} = \frac{2\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = 2\operatorname{tg} 2\alpha, \text{ що й треба було довести.} \end{aligned}$$

13. Доведіть тотожність $\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 6\alpha + \cos 7\alpha = 4\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{5\alpha}{2} \cos 4\alpha.$

Доведення. Для доведення тотожності потрібно використати формулу перетворення суми косинусів у добуток.

Розглянемо ліву частину рівності:

$$\begin{aligned} & \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 6\alpha + \cos 7\alpha = (\cos \alpha + \cos 7\alpha) + (\cos 2\alpha + \cos 6\alpha) = \\ & = 2\cos 4\alpha \cos 3\alpha + 2\cos 4\alpha \cos 2\alpha = 2\cos 4\alpha(\cos 3\alpha + \cos 2\alpha) = 2\cos 4\alpha \cdot 2\cos \frac{5\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \\ & = 4\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{5\alpha}{2} \cos 4\alpha, \text{ що й треба було довести.} \end{aligned}$$

14. Доведіть тотожність $\sin^6 \frac{\alpha}{2} - \cos^6 \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin^2 \alpha - 4}{4} \cos \alpha$.

Доведення. Для доведення тотожності потрібно використати формули пониження степеня, тотожності скороченого множення (куб суми та куб різниці) та основну тригонометричну тотожність.

Розглянемо ліву частину рівності:

$$\begin{aligned} \sin^6 \frac{\alpha}{2} - \cos^6 \frac{\alpha}{2} &= \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)^3 - \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} \right)^3 = \left(\frac{1 - \cos \alpha}{2} \right)^3 - \left(\frac{1 + \cos \alpha}{2} \right)^3 = \\ &= \frac{1 - 3\cos \alpha + 3\cos^2 \alpha - \cos^3 \alpha}{8} - \frac{1 + 3\cos \alpha + 3\cos^2 \alpha + \cos^3 \alpha}{8} = \frac{1}{8}(-6\cos \alpha - 2\cos^3 \alpha) = \\ &= \frac{2\cos \alpha}{8}(-3 - \cos^2 \alpha) = \frac{\cos \alpha}{4}(-3 - (1 - \sin^2 \alpha)) = \frac{\sin^2 \alpha - 4}{4} \cos \alpha, \end{aligned}$$

що й треба було довести.

V. Розв'язування олімпіадних задач. Групова активність (8–10 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Олімпіадна задача. Доведіть, що для довільних додатних чисел a, b, c виконується нерівність $ab + bc + ca \leq 1 + \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}$.

Доведення. Нехай $a = \operatorname{tg} \alpha$, $b = \operatorname{tg} \beta$, $c = \operatorname{tg} \gamma$, де $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, тоді дана нерівність

перепишеться у вигляді: $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma \leq 1 + \frac{1}{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}$,

$$\frac{\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha + \sin \alpha \sin \gamma \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma} \leq \frac{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + 1}{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma},$$

Оскільки $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma > 0$ і остання нерівність рівносильна такій:

$$\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + 1 \geq \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha + \sin \alpha \sin \gamma \cos \beta,$$

$$\cos \gamma (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) - \sin \gamma (\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha) \geq -1,$$

$$\cos \gamma \cos(\alpha + \beta) - \sin \gamma \sin(\alpha + \beta) \geq -1,$$

$$\cos(\alpha + \beta + \gamma) \geq -1.$$

Остання нерівність виконується при будь-яких значеннях змінних.

Оскільки усі записані нерівності рівносильні, то правильною є і початкова нерівність.

Задача 2. Олімпіадна задача. Доведіть, що для будь-яких дійсних чисел $a, b \in [-1; 1]$ справджується нерівність $a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} \leq 1$.

Доведення. Оскільки $a, b \in [-1; 1]$, то нехай $a = \sin \alpha$, $b = \sin \beta$, тоді дана нерівність перепишеться у вигляді:

$$\sin \alpha |\cos \beta| + \sin \beta |\cos \alpha| \leq \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \sin(\alpha + \beta) \leq 1,$$

що правильно для будь-яких дійсних чисел $a, b \in [-1; 1]$.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Спростіть вираз:

$$1) \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 - 1 + \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}; \quad 2) \frac{\sin 2\alpha \cos 4\alpha (1 + \cos 2\alpha)}{(\sin 3\alpha + \sin \alpha)(\cos 3\alpha + \cos 5\alpha)}.$$

2. Спростіть вираз $1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2} - 3\pi\right) - \cos^2 \frac{\alpha}{4} + \sin^2 \frac{\alpha}{4}$.

3. Спростіть вираз:

$$1) \cos \alpha (1 + \cos^{-1} \alpha + \operatorname{tg} \alpha) (1 - \cos^{-1} \alpha + \operatorname{tg} \alpha);$$

$$2) \sin^2 \alpha (1 + \sin^{-1} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) (1 - \sin^{-1} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha).$$

4. Доведіть тотожність:

$$1) (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 = 4 \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$2) (\sin \alpha + \sin \beta)^2 + (\cos \alpha + \cos \beta)^2 = 4 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

5. Доведіть тотожність:

$$1) \frac{2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2 \sin 2\alpha + \sin 4\alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha; \quad 2) \frac{2 \cos 2\alpha - \sin 4\alpha}{2 \cos 2\alpha + \sin 4\alpha} = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right).$$

6. Доведіть тотожність:

$$1) 1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}; \quad 2) \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

Рівень В

1. Доведіть тотожність:

$$1) \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}; \quad 2) \frac{\cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha}{1 + 0,5 \sin 2\alpha} = \cos \alpha - \sin \alpha;$$

$$3) \frac{\sin 4\alpha \cdot \cos 2\alpha}{(1 + \cos 4\alpha)(1 + \cos 2\alpha)} = \operatorname{tg} \alpha; \quad 4) \frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha;$$

2. Доведіть тотожність $\sin^2\left(\frac{7\pi}{8} - 2\alpha\right) - \sin^2\left(\frac{9\pi}{8} - 2\alpha\right) = \frac{\sin 4\alpha}{\sqrt{2}}$.

3. Доведіть тотожність:

$$1) \cos^2 3\alpha + \cos^2 2\alpha = \cos 5\alpha \cdot \cos \alpha + 1; \quad 2) \sin \alpha \cdot \sin 3\alpha = \sin^2 2\alpha - \sin^2 \alpha.$$

4. Доведіть тотожність:

$$1) 8 \cos^4 \alpha = 3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha; \quad 2) 8 \sin^4 \alpha = 3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha.$$

5. Доведіть тотожність:

$$1) \frac{\cos\left(4\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{5\pi}{2} + 2\alpha\right)}{(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha)} = \operatorname{tg} \alpha;$$

$$2) \frac{\sin^2(\alpha - \pi) - 4 \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right) - 4 + 4 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)} = \operatorname{tg}^4 \frac{\alpha}{2}.$$

6. Доведіть тотожність:

1) $\sin \alpha (\sin \alpha + \sin \beta) + \cos \alpha (\cos \alpha + \cos \beta) = 2 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2};$

2) $\sin \alpha (\sin \alpha - \sin \beta) + \cos \alpha (\cos \alpha - \cos \beta) = 2 \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}.$

7. Спростіть вираз:

1) $\frac{\cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha}{\sqrt{2} \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)} - \frac{1}{2} \sin 2\alpha;$

2) $\frac{\cos^3 \alpha + \sin^3 \alpha}{\sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)} + \frac{1}{2} \sin 2\alpha.$

8. Знайдіть значення виразу:

1) $\sin \frac{\pi}{11} \cdot \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{22} \right) - \sin \frac{9\pi}{22} \cdot \cos \frac{9\pi}{22};$

2) $2 \cos \frac{\pi}{17} \cdot \left(2 \cos^2 \frac{\pi}{34} - 1 \right) + \cos \frac{19\pi}{17}.$

9. Спростіть вираз:

1) $\frac{32 \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \cos 8\alpha}{\sin 16\alpha};$

2) $\frac{\cos 3\alpha \cdot \cos 6\alpha \cdot \cos 12\alpha \cdot \cos 24\alpha}{\sin 48\alpha}.$

10. Спростіть вираз:

1) $\sin^2 \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\alpha}{2} \right);$

2) $\frac{\sin(60^\circ + \alpha)}{4 \sin \left(15^\circ + \frac{\alpha}{4} \right) \sin \left(75^\circ - \frac{\alpha}{4} \right)}.$

11. Доведіть тотожність:

1) $\operatorname{ctg} \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) \sin \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) + \operatorname{tg}(\pi + \alpha) \cos(\pi + \alpha) \cos(2\pi - \alpha) = 0;$

2) $\sin(\alpha - 270^\circ) \cos(\alpha + 90^\circ) \operatorname{tg}(3\alpha - 180^\circ) = \cos(180^\circ - \alpha) \sin(180^\circ - \alpha) \operatorname{ctg}(90^\circ - 3\alpha).$

12. Спростіть вираз:

1) $\frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \operatorname{tg}(\pi - \alpha)}{\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \sin(\pi - \alpha)};$

2) $\frac{\sin \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \beta \right)}{\cos(\pi - \alpha) \operatorname{ctg} \left(\frac{3\pi}{2} - \beta \right)} - \frac{\sin \left(\frac{3\pi}{2} - \beta \right) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)}{\cos(2\pi - \beta) \operatorname{tg}(\pi - \alpha)}.$

Рівень С

1. Доведіть тотожність:

1) $(\cos \alpha + \cos \beta)^2 - (\sin \alpha + \sin \beta)^2 = 4 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \cos(\alpha + \beta);$

2) $(\cos \alpha - \cos 2\beta)^2 + (\sin \alpha + \sin 2\beta)^2 = 4 \sin^2 \frac{\alpha + 2\beta}{2}.$

2. Спростіть вираз $\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} 2x + 4 \operatorname{tg} 4x + 8 \operatorname{tg} 8x + 16 \operatorname{tg} 16x + 32 \operatorname{ctg} 32x.$

3. Доведіть тотожність:

1) $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{tg} 2x - 4 \operatorname{tg} 4x = 8 \operatorname{ctg} 8x;$ 2) $\operatorname{tg} 9x - \operatorname{tg} 6x - \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 9x \operatorname{tg} 6x \operatorname{tg} 3x.$

4. Доведіть тотожність:

1) $\frac{\sqrt{1+\cos\alpha} + \sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{1+\cos\alpha} - \sqrt{1-\cos\alpha}} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$, якщо $\pi < \alpha < 2\pi$;

2) $\frac{\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}}{\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, якщо $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

5. Обчисліть:

1) $\cos 73^\circ \cdot \cos 47^\circ + \cos^2 47^\circ + \cos^2 73^\circ$;

2) $2\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 30^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ$.

6. Доведіть тотожність:

1) $\frac{\operatorname{tg}^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} + \frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{ctg}^3 \alpha$;

2) $\frac{\cos^3 \alpha - \cos 3\alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin^3 \alpha + \sin 3\alpha}{\sin \alpha} = 3$.

VII. Рефлексія (1–2 хв)

1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що

2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що

3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію

4) Найскладнішим для мене було

5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності

6) Найбільше мені сподобалося

Можливі теми проєктів

1. Тригонометрична підстановка при доведенні нерівностей.
2. Алгоритмізація процесу спрощення тригонометричних виразів.
3. Аналіз спрощення тригонометричних виразів засобами штучного інтелекту.
4. Створення міні-програми для тренування алгоритмів спрощення тригонометричних виразів.
5. Дослідження та пошук «корисних» тригонометричних тотожностей, які не входять до шкільної програми.