

Тема 2.

Співвідношення між тригонометричними функціями

Урок 17. Полярна система координат

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) застосуванню систем координат у математиці;
- 2) основним практичним аспектам використання полярних координат;
- 3) позначати на площині точки, задані в полярних координатах;
- 4) переводити координати точки з декартової системи в полярну і навпаки;
- 5) використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Спростіть вираз $\frac{\cos 3\alpha}{2\sin \alpha} + \frac{\sin 3\alpha}{2\cos \alpha}$.
2. Спростіть вираз $\frac{\operatorname{tg} 4\alpha + \operatorname{tg} 3\alpha}{1 - \operatorname{tg} 4\alpha \operatorname{tg} 3\alpha}$.
3. Знайдіть площу трикутника, гіпотенуза якого дорівнює c , а гострий кут дорівнює α .
4. Розв'яжіть нерівність $(x - 2)\sin 4 \geq 0$.
5. Скоротіть дріб $\frac{\sin 6\alpha}{2\cos 3\alpha}$.

III. Системи координат в математиці

Положення будь-якої точки на площині може бути визначено за допомогою тієї чи іншої системи координат.

Числа (або інші символи), що визначають положення точки, називаються координатами цієї точки. Залежно від цілей і характеру досліджень вибирають різні системи координат.

До сьогодення уроку ми користувалися лише прямокутною системою координат, де кожна точка задається впорядкованою парою чисел.

Уперше прямокутну систему координат увів французький вчений Рене Декарт в своїй роботі «Міркування про метод» у 1637 році. Тому прямокутну систему координат називають також *декартовою системою координат*.

Значний внесок у розвиток координатного методу вніс ще один французький математик Пер Ферма, проте його роботи були вперше опубліковані вже після його смерті.

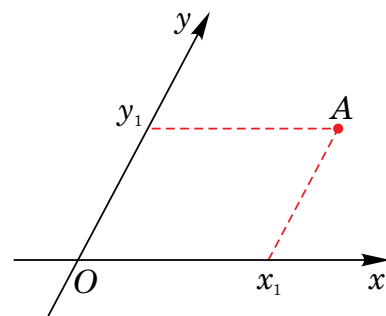
Декарт і Ферма застосовували координатний метод тільки на площині.

Координатний метод для тривимірного простору вперше застосував Леонард Ойлер вже в XVIII столітті.

Найбільш схожа з прямокутною системою координат — *косокутна система координат*, де осі координат — дві не паралельні прямі (див. рисунок).

Координати точки визначаються аналогічно до прямокутної системи координат — за прямими паралельними осям координат.

Косокутна система координат використовується, наприклад, в деяких механізмах, а також при розрахунках в теоретичній механіці.



IV. Доцільність введення полярної системи координат

Найважливішою після прямокутної декартової системи координат є *полярна система координат*. Вона задається точкою O , яка називається полюсом, і променем Op , який виходить з полюса і називається полярною віссю. Задаються також одиниці масштабу: лінійна — для вимірювання довжин відрізків і кутова — для вимірювання кутів.

Історія полярних координат починається ще до нашої ери, адже поняття кута та радіуса вже були відомі давньогрецьким ученим. Грецький астроном Гіппарх застосовував полярні координати для своїх спостережень за небесними тілами. Перські астрономи у IX столітті висували ідеї, подібні до полярних координат.

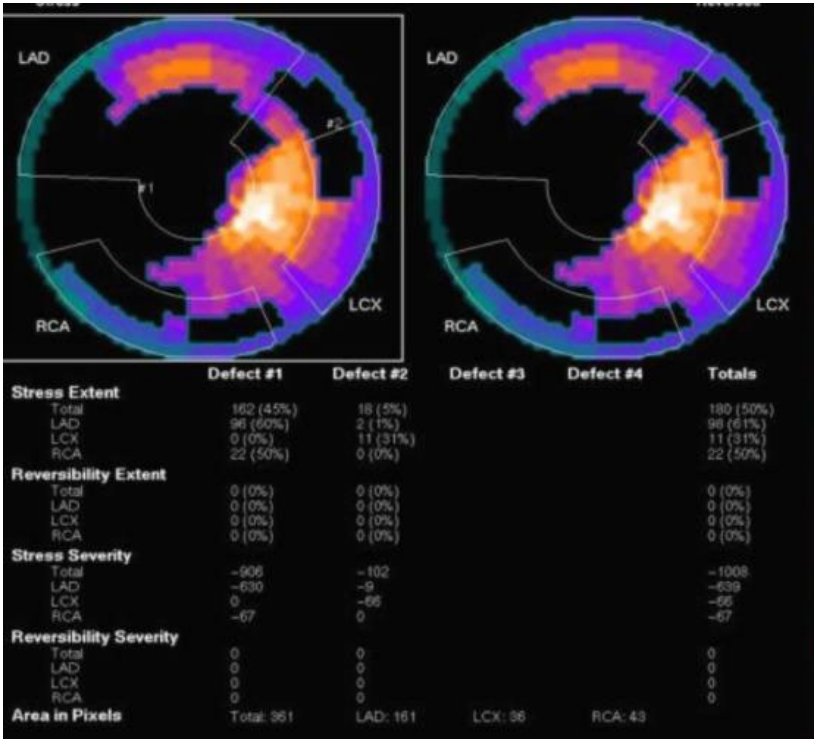
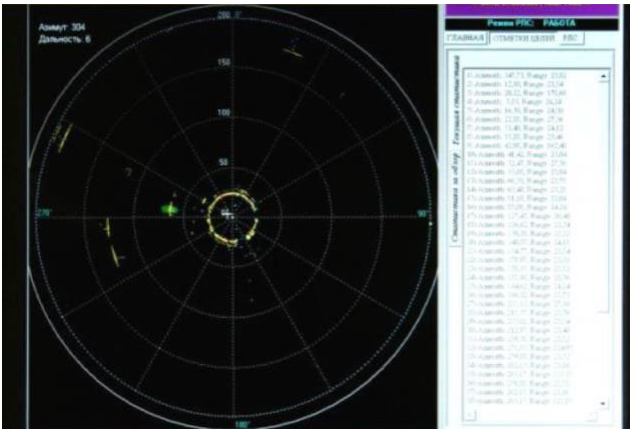
Строгий математичний опис полярної системи координат було зроблено одразу кількома математиками незалежно один від одного. Серед них — бельгійський математик, монах-єзуїт Сен-Венсан (1625 рік) та італійський математик Кавальєрі (1635 рік).

Французький математик Паскаль використовував полярні координати у своїх дослідженнях у середині XVII століття. Ньютон займався вивченням перетворень різних систем координат, серед яких були й полярні. Швейцарський математик Бернуллі запровадив поняття полюса та кута від полярної осі, які й досі застосовуються для опису цієї системи координат.

Полярні координати мають широке застосування у фізиці, наприклад, для моделювання звуку гучномовців, у фотометрії — для опису залежності відбитого світлового потоку від кута.

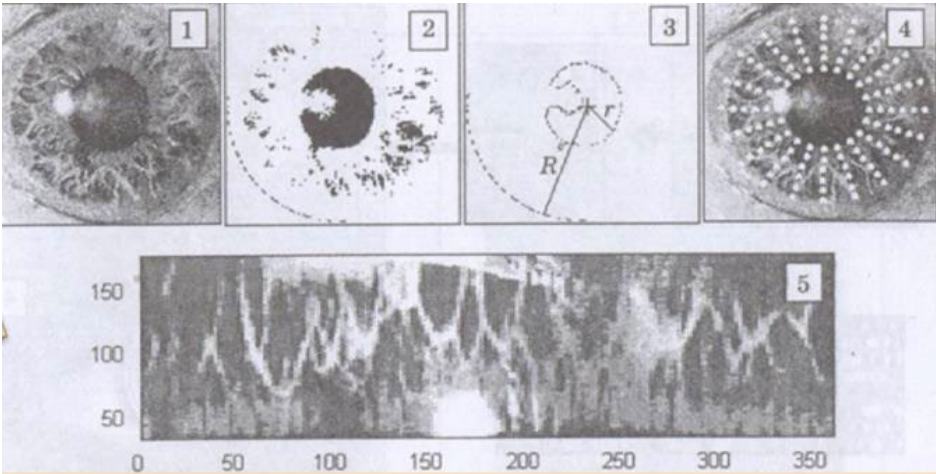
Координати цілі можуть задаватися в полярній системі координат (азимут, дальність) і відображатися за допомогою радіолокаційних станцій (РЛС) (див. рисунок).

Також полярні координати застосовуються при комп’ютерній томографії серця (див. рисунок).



При скануванні сітчатки ока також використовують полярні координати (див. рисунок).

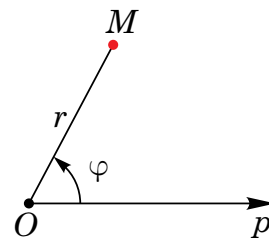
Також часто застосовують полярні координати в комп’ютерній графіці, зокрема в іграх.



V. Зображення точок у полярній системі координат

Положення будь-якої точки M (див. рисунок) на площині можна задати двома числами:

- 1) r — відстань від точки M до полюса ($r \geq 0$);
- 2) φ — кут між полярною віссю та відрізком OM (додатним напрямом відкладання кута вважається напрям проти годинникової стрілки).



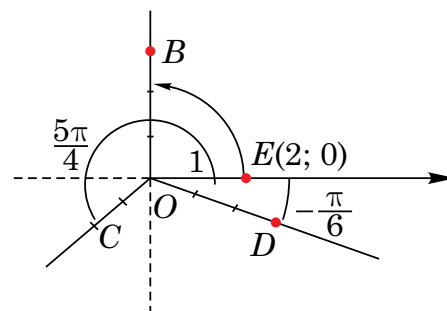
Числа r и φ називаються *полярними координатами* точки M .

Щоб між точками та їхніми полярними координатами встановилася взаємно-однозначна відповідність, то на кут φ накладають обмеження $0 \leq \varphi < 2\pi$ (або $-\pi \leq \varphi < \pi$).

Приклад 1. Побудуйте точки, задані полярними координатами:

$$B\left(3; \frac{\pi}{2}\right), C\left(2; \frac{5\pi}{4}\right), D\left(3; -\frac{\pi}{6}\right), E(2; 0).$$

Розв'язання. Побудуємо точку $B\left(3; \frac{\pi}{2}\right)$. Уведемо полярну систему координат. Із точки O проведемо промінь під кутом $\varphi = \frac{\pi}{2}$ до полярної осі та відмітимо на ньому точку B з координатою $r = 3$. Решта точок будуються аналогічно (див. рисунок).



Приклад 2. Доведіть формулу для обчислення площі трикутника OA_1A_2 , вершина O якого збігається з полюсом, а дві інші задані полярними координатами: $A_1(r_1; \varphi_1)$, $A_2(r_2; \varphi_2)$. Скориставшись цією формулою, обчисліть площу трикутника, одна з вершин якого лежить у полюсі, а дві інші мають полярні координати $A_1\left(4; \frac{\pi}{9}\right)$,

$$A_2\left(1; \frac{5\pi}{18}\right).$$

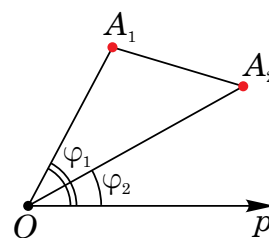
Розв'язання. У трикутнику OA_1A_2 : $\angle A_1OA_2 = \varphi_2 - \varphi_1$ (див. рисунок).

$$S_{OA_1A_2} = \frac{1}{2} |OA_1| \cdot |OA_2| \cdot \sin \angle A_1OA_2 = \frac{1}{2} r_1 r_2 |\sin(\varphi_2 - \varphi_1)|.$$

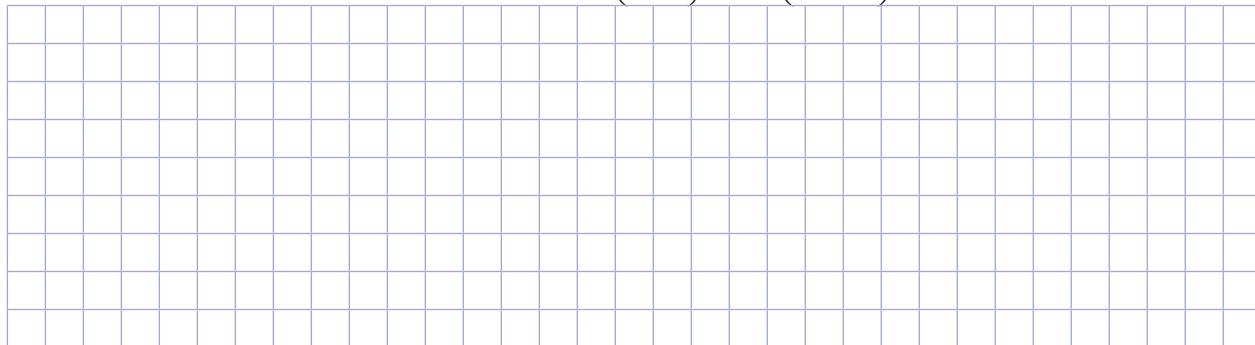
Використовуючи цю формулу для точок $A_1\left(4; \frac{\pi}{9}\right)$, $A_2\left(1; \frac{5\pi}{18}\right)$:

$$S_{OA_1A_2} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 \cdot \left| \sin \left(\frac{5\pi}{18} - \frac{\pi}{9} \right) \right| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \left| \sin \frac{\pi}{6} \right| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 1 \text{ (кв. од).}$$

Відповідь. 1 кв. од.

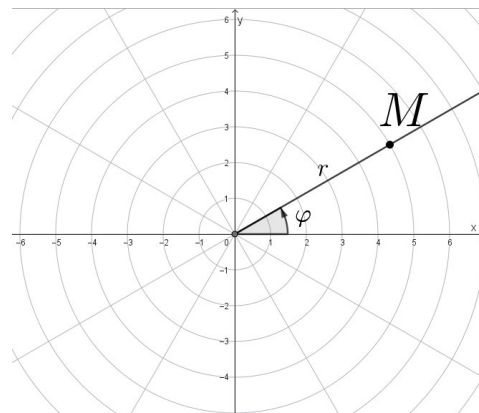


Приклад 3. Доведіть формулу для обчислення відстані між двома точками $A_1(r_1; \varphi_1)$ і $A_2(r_2; \varphi_2)$, заданими у полярній системі координат. Скориставшись цією формулою, знайдіть відстань між точками $A_1\left(5; \frac{\pi}{6}\right)$ і $A_2\left(3; -\frac{\pi}{6}\right)$.



VI. Формули переходу від полярних координат до декартових

У деяких випадках доводиться одночасно користуватися і декартовою, і полярною системами координат. Координати точки на площині часто записують як у полярній, так і в прямокутній системах координат та застосовують перетворення координат з однієї системи в іншу. Якщо немає спеціальних зауважень, то зазвичай мають на увазі таке взаємне розташування прямокутної та полярної систем координат: полюс полярної системи збігається з початком прямокутної системи координат; полярна вісь збігається з додатною частиною осі абсцис, а масштаб у полярній системі для вимірювання відстаней приймається рівним одиниці довжини у прямокутній системі координат (див. рисунок).



Якщо початок декартової прямокутної системи координат сумістити з полюсом, а вісь Ox спрямувати вздовж полярної осі, то прямокутні координати x і y точки M та її полярні координати r і φ пов'язані між собою такими формулами (див. рисунок):

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \varphi, \\ y = r \cdot \sin \varphi. \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \end{cases}$$

З цих формул випливає, що $\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Формула $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$ визначає два кути $-\varphi$ і $\varphi + \pi$ — у межах одного кола.

Формули для косинуса й синуса уточнюють, який із цих кутів потрібно вибрати.

Ці співвідношення дають змогу знаходити декартові координати точки за заданими полярними, а також розв'язувати обернену задачу.

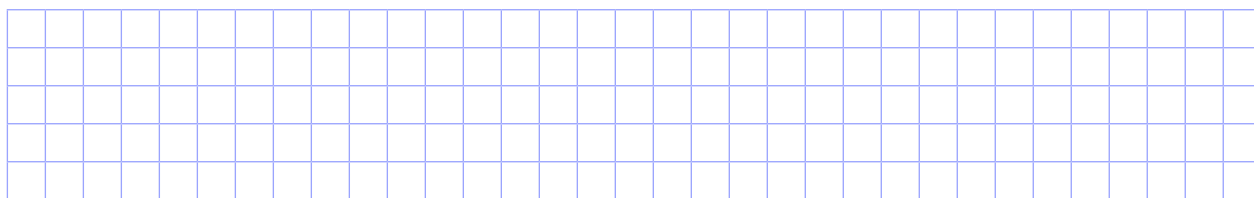
Приклад 4. Дано полярні координати точки $A\left(2; \frac{\pi}{3}\right)$. Визначте її прямокутні координати, якщо вісь абсцис збігається з полярною віссю, а початок координат — із полюсом.

Розв'язання. $x = r \cos \varphi = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$

$y = r \sin \varphi = 2 \sin \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$ Отже, $A(1; \sqrt{3}).$

Відповідь. $A(1; \sqrt{3}).$

Приклад 5. Знайдіть полярні координати точки $A(1; \sqrt{3})$, якщо полюс збігається з початком координат, а полярна вісь — з додатним напрямом осі абсцис.



VII. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Робот рухається по кімнаті, орієнтуючись за допомогою полярних координат. Спочатку він міститься у точці $(r = 2, \varphi = 0^\circ)$, потім повертається на 90° і рухається ще на 3 м.

1. Знайдіть нові полярні координати робота.
2. Знайдіть його положення у декартових координатах.

VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

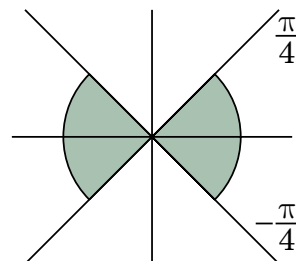
Рівень А

1. Побудуйте точки, задані полярними координатами:
 $B(2; \pi), C\left(3; -\frac{\pi}{4}\right), D\left(4; \frac{22}{7}\right), E(5; 2), F(1; -1).$
2. Визначте полярні координати точок, симетричних відносно полярної осі точкам
 $M_1\left(3; \frac{\pi}{2}\right), M_2\left(2; -\frac{\pi}{2}\right), M_3\left(3; -\frac{\pi}{3}\right), M_4(1; 3), M_5(5; -1),$ заданих у полярній системі координат.
3. Визначте полярні координати точок, симетричних відносно полюса точкам
 $M_1\left(1; \frac{\pi}{4}\right), M_2\left(5; \frac{\pi}{2}\right), M_3\left(2; -\frac{\pi}{3}\right), M_4\left(4; \frac{5\pi}{6}\right), M_5(3; -2),$ заданих у полярній системі координат.

4. У полярній системі координат задано точки $A\left(8; \frac{\pi}{2}\right)$ і $B\left(6; \frac{\pi}{3}\right)$. Визначте полярні координати середини відрізка AB .
5. Знайдіть декартові координати точки за її полярними координатами:
- 1) $(1; \pi)$; 2) $\left(3; \frac{2\pi}{3}\right)$.
6. Знайдіть полярні координати точки за її декартовими координатами:
- 1) $(0; 1)$; 2) $(1; \sqrt{3})$.

Рівень В

1. У полярній системі координат задано дві вершини $A\left(3; -\frac{4\pi}{9}\right)$ і $B\left(5; \frac{3\pi}{14}\right)$ паралелограма $ABCD$, точка перетину діагоналей якого збігається з полюсом. Визначте координати двох інших вершин паралелограма в полярних координатах.
2. У полярній системі координат задано точки $A\left(3; \frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(2; -\frac{\pi}{4}\right)$, $C(1; \pi)$, $D\left(5; -\frac{3\pi}{4}\right)$, $E(3; 2)$, $F(2; -1)$. Додатний напрям полярної осі змінили на протилежний. Визначте полярні координати заданих точок в новій системі.
3. У полярній системі координат задано точки $M_1\left(3; \frac{\pi}{3}\right)$, $M_2\left(1; \frac{2\pi}{3}\right)$, $M_3(2; 0)$, $M_4\left(5; \frac{\pi}{4}\right)$, $M_5\left(3; -\frac{2\pi}{3}\right)$, $M_6\left(1; \frac{11\pi}{12}\right)$. Полярну вісь повернуто так, що в новому положенні вона проходить через точку M_1 . Визначте координати заданих точок у новій (полярній) системі.
4. У полярній системі координат дані точки $M_1\left(5; \frac{\pi}{4}\right)$, $M_2\left(8; -\frac{\pi}{2}\right)$. Визначте відстань d між ними.
5. Запишіть полярне рівняння прямої $x = 1$.
6. Побудуйте геометричне місце точок на площині, полярні координати $(r; \varphi)$ яких задовольняють нерівності:
- 1) $30^\circ < \varphi < 60^\circ$;
 2) $1 < r < 2$;
 3) $30^\circ < \varphi < 60^\circ, 1 < r < 2$.
7. Нарисуйте спіраль Архімеда, задану рівнянням $r = -\varphi$.
8. Запишіть нерівність, яка задає зафарбовану область (див. рисунок) у полярних координатах.



9. Запишіть рівняння $r \sin \varphi = 4$ у декартовій системі координат.

- 10.** У полярній системі координат задані дві сусідні вершини квадрата $A\left(12; -\frac{\pi}{10}\right)$, $B\left(3; \frac{\pi}{15}\right)$. Визначте його площу.
- 10.** У полярній системі координат задані дві вершини рівностороннього трикутника $A\left(4; -\frac{\pi}{12}\right)$, $B\left(8; \frac{7\pi}{12}\right)$. Визначте його площу.
- 12.** Одна вершина трикутника OAB знаходиться на полюсі, дві інші вершини мають в полярній системі координат координати $A\left(5; \frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(4; \frac{\pi}{12}\right)$. Обчисліть площу трикутника.

Рівень С

- 1.** Обчисліть площу трикутника, вершини якого задано в полярних координатах:
 $A\left(3; \frac{\pi}{8}\right), B\left(8; \frac{7\pi}{4}\right), C\left(6; \frac{5\pi}{8}\right)$.
- 2.** Знайдіть геометричне місце точок, полярні координати яких задовольняють рівняння:
1) $r = \frac{1}{\cos \varphi}$; 2) $r = \frac{1}{\sin \varphi}$.
- 3.** Дано правильний шестикутник $ABCDEF$. Уважаючи полярною віссю промінь AB , додатним напрямом відліку кутів — напрям найкоротшого повороту від AB до AC , а одиничним відрізком відрізок AB , визначте в цій системі полярні координати вершин шестикутника.
- 4.** Запишіть рівняння $r^2 = 9 \sin 2\varphi$ у декартовій системі координат.
- 5.** У полярній системі координат задані дві протилежні вершини квадрата $P\left(6; -\frac{7\pi}{12}\right)$ і $Q\left(4; \frac{\pi}{6}\right)$. Визначте площу квадрата.
- 6.** Обчисліть площу трикутника ABC , вершини якого $A\left(3; \frac{\pi}{8}\right), B\left(8; \frac{7\pi}{4}\right), C\left(6; \frac{5\pi}{8}\right)$ задані в полярних координатах.
- 7.** **Творче завдання.** Напишіть програму, за якою будуються фігури в полярній системі координат.

Рефлексія

- | | | | |
|-----------|---|------------------------|----|
| 1. | Я знаю, які системи координат використовують в математиці. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я знаю основні практичні аспекти використання полярних координат. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

- | | | | | |
|-----------|--|-----|------------------------|----|
| 3. | Я вмію позначати на площині точки, задані в полярних координатах. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я вмію перетворювати координати точки із декартової системи координат у полярну і навпаки. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

- 1.** Застосування полярних координат в навігації і в астрономії.
- 2.** Полярні координати в моделюванні хвиль та коливань.
- 3.** Полярні координати в комп'ютерній графіці.
- 4.** Використання полярних координат у робототехніці.
- 5.** Застосування полярних координат у радарних і в сонарних системах.







