

11

Тема 2. Співвідношення між тригонометричними функціями

Урок 17. Полярна система координат

Тип уроку: урок засвоєння нових знань.

План уроку

1. Системи координат в математиці.
2. Доцільність введення полярної системи координат.
3. Зображення точок у полярній системі координат.
4. Формули переходу від полярних координат до декартових.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

самостійно або у взаємодії з іншими виокремлює спільні ознаки специфічних проблемних ситуацій, для розв'язання яких можна застосувати подібні методи [12 МАО 1.1.2–1 П];

добирає додаткову інформацію з різних джерел і галузей знань [12 МАО 2.1.2–1 П];

оцінює обґрунтованість математичного розв'язання в контексті реальної комплексної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.3–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.
- 6) Заплануйте розв'язання практичної задачі.

- 7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці.
- 8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів.
- 9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С.
- 10) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Чи існують системи координат відмінні від декартової прямокутної системи координат?
- 2) Чи відоме вам поняття «азимут»? Як воно пов'язане з полярними координатами?
- 3) Чи можна замість чисел при описі координат точки використовувати кути?
- 4) Як краще задати координати корабля, який знаходиться на відстані 5 км від спостерігача під кутом 60° до узбережжя?
- 5) У якій системі координат зручніше задавати координати тіла, що рухається по колу?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Спростіть вираз $\frac{\cos 3\alpha}{2\sin \alpha} + \frac{\sin 3\alpha}{2\cos \alpha}$.
Відповідь. $\operatorname{ctg} 2\alpha$.
2. Спростіть вираз $\frac{\operatorname{tg} 4\alpha + \operatorname{tg} 3\alpha}{1 - \operatorname{tg} 4\alpha \operatorname{tg} 3\alpha}$.
Відповідь. $\operatorname{tg} 7\alpha$.
3. Знайдіть площу трикутника, гіпотенуза якого дорівнює c , а гострий кут дорівнює α .
Відповідь. $\frac{c^2 \sin 2\alpha}{4}$.
4. Розв'яжіть нерівність $(x - 2) \sin 4 \geq 0$.
Відповідь. $(-\infty; 2]$.
5. Скоротіть дріб $\frac{\sin 6\alpha}{2\cos 3\alpha}$.
Відповідь. $\sin 3\alpha$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Робот рухається по кімнаті, орієнтуючись за допомогою полярних координат. Спочатку він міститься у точці $(r = 2, \varphi = 0^\circ)$, потім повертається на 90° і рухається ще на 3 м.

1. Знайдіть нові полярні координати робота.
2. Знайдіть його положення у декартових координатах.

III. Системи координат в математиці

Положення будь-якої точки на площині може бути визначено за допомогою тієї чи іншої системи координат.

Числа (або інші символи), що визначають положення точки, називаються координатами цієї точки. Залежно від цілей і характеру досліджень вибирають різні системи координат.

До сьогодення ми користувалися лише прямокутною системою координат, де кожна точка задається впорядкованою парою чисел.

Уперше прямокутну систему координат увів французький вчений Рене Декарт в своїй роботі «Міркування про метод» у 1637 році. Тому прямокутну систему координат називають також *декартовою системою координат*.

Значний внесок у розвиток координатного методу вніс ще один французький математик Пер Ферма, проте його роботи були вперше опубліковані вже після його смерті.

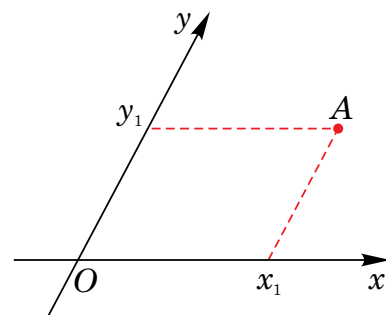
Декарт і Ферма застосовували координатний метод тільки на площині.

Координатний метод для тривимірного простору вперше застосував Леонард Ойлер вже в XVIII столітті.

Найбільш схожа з прямокутною системою координат — *косокутна система координат*, де осі координат — дві не паралельні прямі (див. рисунок).

Координати точки визначаються аналогічно до прямокутної системи координат — за прямими паралельними осям координат.

Косокутна система координат використовується, наприклад, в деяких механізмах, а також при розрахунках в теоретичній механіці.



IV. Доцільність введення полярної системи координат

Найважливішою після прямокутної декартової системи координат є *полярна система координат*. Вона задається точкою O , яка називається полюсом, і променем Or , який виходить з полюса і називається полярною віссю. Задаються також одиниці масштабу: лінійна — для вимірювання довжин відрізків і кутова — для вимірювання кутів.

Історія полярних координат починається ще до нашої ери, адже поняття кута та радіуса вже були відомі давньогрецьким ученим. Грецький астроном Гіппарх застосовував полярні координати для своїх спостережень за небесними тілами. Перські астрономи у IX столітті висували ідеї, подібні до полярних координат.

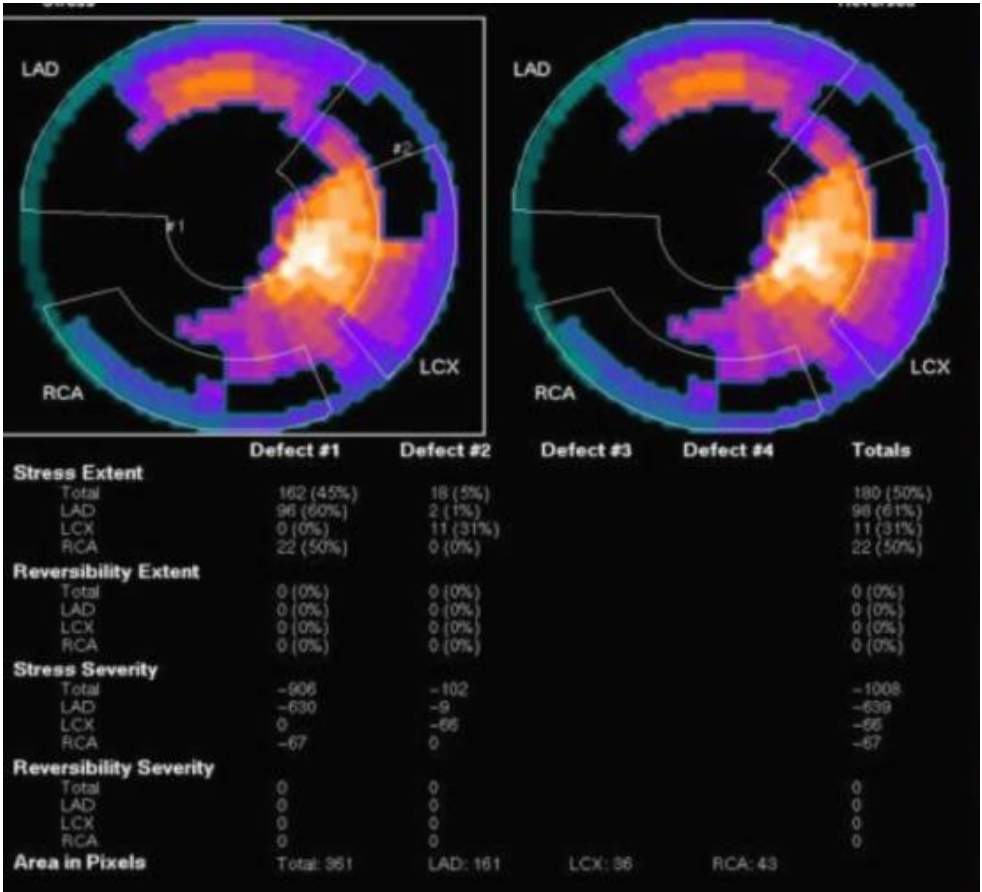
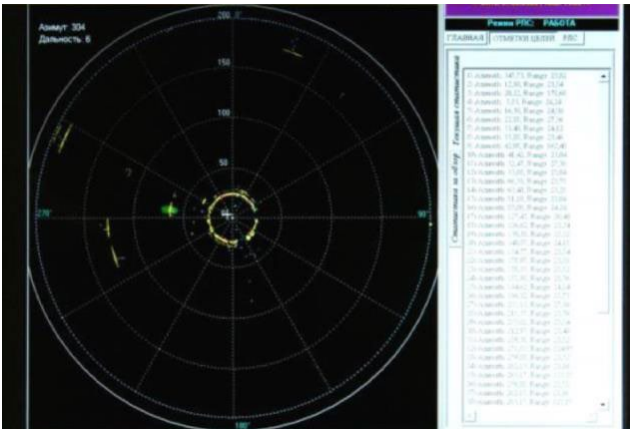
Строгий математичний опис полярної системи координат було зроблено одразу кількома математиками незалежно один від одного. Серед них — бельгійський математик, монах-єзуїт Сен-Венсан (1625 рік) та італійський математик Кавальєрі (1635 рік).

Французький математик Паскаль використовував полярні координати у своїх дослідженнях у середині XVII століття. Ньютон займався вивченням перетворень різних систем координат, серед яких були й полярні. Швейцарський математик Бернуллі запровадив поняття полюса та кута від полярної осі, які й досі застосовуються для опису цієї системи координат.

Полярні координати мають широке застосування у фізиці, наприклад, для моделювання звуку гучномовців, у фотометрії — для опису залежності відбитого світлового потоку від кута.

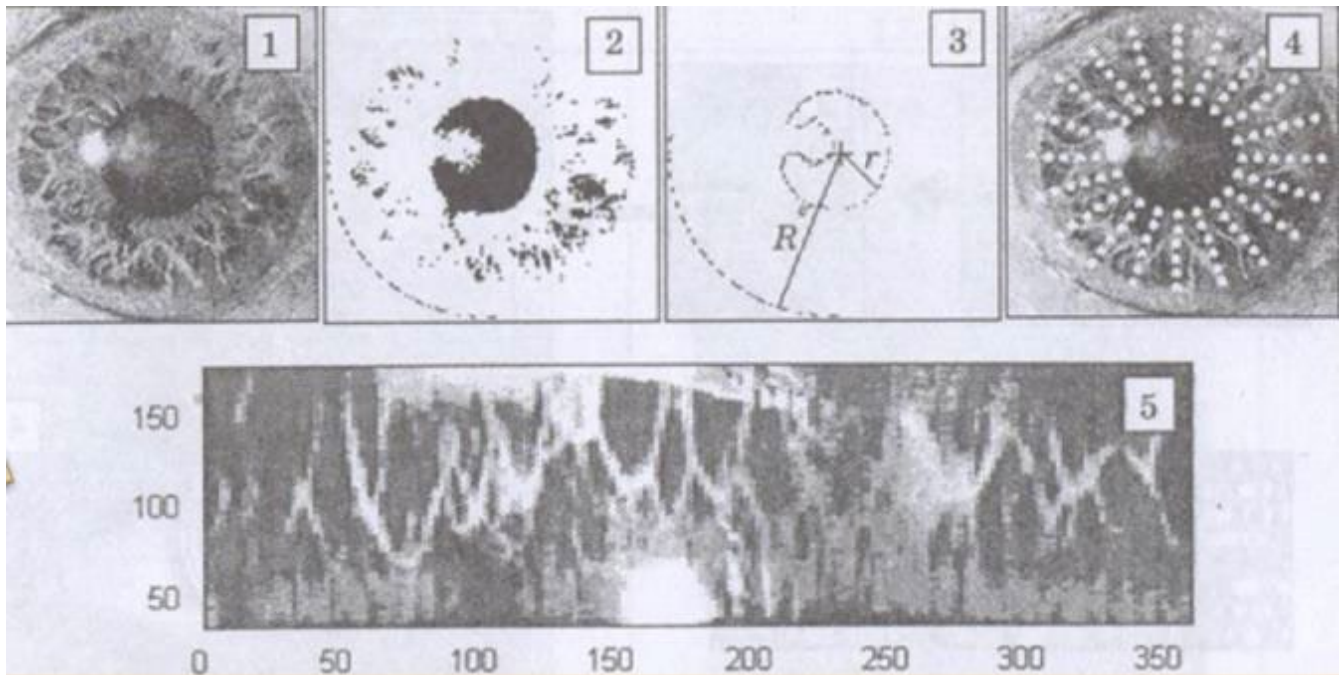
Координати цілі можуть задаватися в полярній системі координат (азимут, дальність) і відображатися за допомогою радіолокаційних станцій (РЛС) (див. рисунок).

Також полярні координати застосовуються при комп'ютерній томографії серця (див. рисунок).



При скануванні сітчатки ока також використовують полярні координати (див. рисунок).

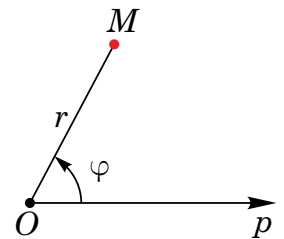
Також часто застосовують полярні координати в комп'ютерній графіці, зокрема в іграх.



V. Зображення точок у полярній системі координат

Положення будь-якої точки M (див. рисунок) на площині можна задати двома числами:

- 1) r — відстань від точки M до полюса ($r \geq 0$);
- 2) φ — кут між полярною віссю та відрізком OM (додатним напрямом відкладання кута вважається напрям проти годинникової стрілки).



Числа r и φ називаються *полярними координатами* точки M .

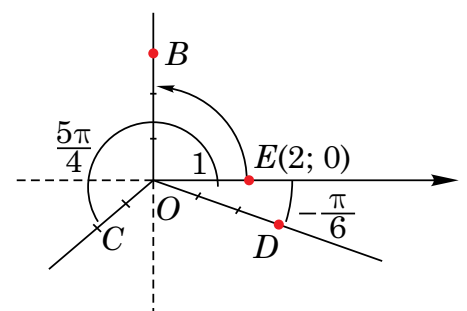
Щоб між точками та їхніми полярними координатами встановилася взаємно-однозначна відповідність, то на кут φ накладають обмеження $0 \leq \varphi < 2\pi$ (або $-\pi \leq \varphi < \pi$).

Ілюстративні приклади

6. Побудуйте точки, задані полярними координатами:

$$B\left(3; \frac{\pi}{2}\right), C\left(2; \frac{5\pi}{4}\right), D\left(3; -\frac{\pi}{6}\right), E(2; 0).$$

Розв'язання. Побудуємо точку $B\left(3; \frac{\pi}{2}\right)$. Уведемо полярну систему координат. Із точки O проведемо промінь під кутом $\varphi = \frac{\pi}{2}$ до полярної осі та відмітимо на ньому точку B з координатою $r = 3$. Решта точок будуються аналогічно (див. рисунок).



7. Доведіть формулу для обчислення площі трикутника OA_1A_2 , вершина O якого збігається з полюсом, а дві інші задані полярними координатами: $A_1(r_1; \varphi_1)$, $A_2(r_2; \varphi_2)$. Скориставшись цією формулою, обчисліть площу трикутника, одна з вершин якого лежить у полюсі, а дві інші мають полярні координати $A_1\left(4; \frac{\pi}{9}\right)$, $A_2\left(1; \frac{5\pi}{18}\right)$.

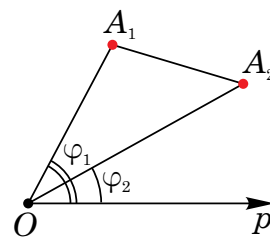
Розв'язання. У трикутнику OA_1A_2 : $\angle A_1OA_2 = \varphi_2 - \varphi_1$ (див. рисунок).

$$S_{OA_1A_2} = \frac{1}{2} |OA_1| \cdot |OA_2| \cdot \sin \angle A_1OA_2 = \frac{1}{2} r_1 r_2 |\sin(\varphi_2 - \varphi_1)|.$$

Використовуючи цю формулу для точок $A_1\left(4; \frac{\pi}{9}\right)$, $A_2\left(1; \frac{5\pi}{18}\right)$:

$$S_{OA_1A_2} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 \cdot \left| \sin \left(\frac{5\pi}{18} - \frac{\pi}{9} \right) \right| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \left| \sin \frac{\pi}{6} \right| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 1 \text{ (кв. од.)}$$

Відповідь. 1 кв. од.



8. Доведіть формулу для обчислення відстані між двома точками $A_1(r_1; \varphi_1)$ і $A_2(r_2; \varphi_2)$, заданими у полярній системі координат. Скориставшись цією формулою, знайдіть відстань між точками $A_1\left(5; \frac{\pi}{6}\right)$ і $A_2\left(3; -\frac{\pi}{6}\right)$.

Розв'язання. У трикутнику A_1OA_2 : $\angle A_1OA_2 = \varphi_2 - \varphi_1$ (див. рисунок).

За теоремою косинусів:

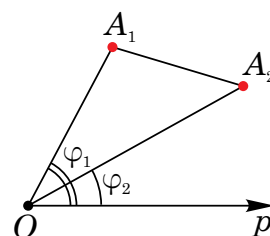
$$\begin{aligned} |A_1A_2|^2 &= |OA_1|^2 + |OA_2|^2 - 2|OA_1| \cdot |OA_2| \cdot \cos \angle A_1OA_2 = \\ &= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } |A_1A_2| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Скориставшись цією формулою, знайдемо відстань між точками $A_1\left(5; \frac{\pi}{6}\right)$ і

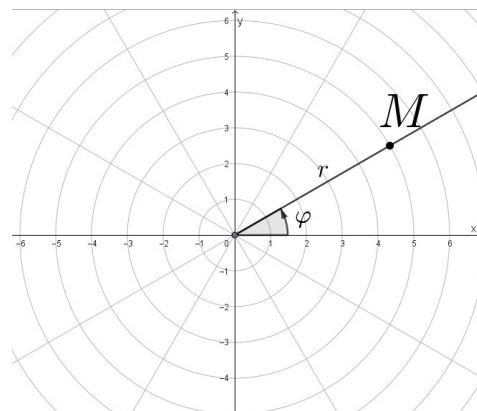
$$A_2\left(3; -\frac{\pi}{6}\right): |A_1A_2| = \sqrt{25 + 9 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos \frac{\pi}{3}} = \sqrt{19}.$$

Відповідь. $\sqrt{19}$.



VI. Формули переходу від полярних координат до декартових

У деяких випадках доводиться одночасно користуватися і декартовою, і полярною системами координат. Координати точки на площині часто записують як у полярній, так і в прямокутній системах координат та застосовують перетворення координат з однієї системи в іншу. Якщо немає спеціальних зауважень, то зазвичай мають на увазі таке взаємне розташування прямокутної та полярної систем координат: полюс полярної системи збігається з початком прямокутної



системи координат; полярна вісь збігається з додатною частиною осі абсцис, а масштаб у полярній системі для вимірювання відстаней приймається рівним одиниці довжини у прямокутній системі координат (див. рисунок).

Якщо початок декартової прямокутної системи координат сумістити з полюсом, а вісь Ox спрямувати вздовж полярної осі, то прямокутні координати x і y точки M та її полярні координати r і φ пов'язані між собою такими формулами (див. рисунок):

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \varphi, \\ y = r \cdot \sin \varphi. \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \end{cases}$$

З цих формул випливає, що $\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Формула $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$ визначає два кути $-\varphi$ і $\varphi + \pi$ — у межах одного кола.

Формули для косинуса й синуса уточнюють, який із цих кутів потрібно вибрати.

Ці співвідношення дають змогу знаходити декартові координати точки за заданими полярними, а також розв'язувати обернену задачу.

Ілюстративні приклади

- 9.** Дано полярні координати точки $A\left(2; \frac{\pi}{3}\right)$. Визначте її прямокутні координати, якщо вісь абсцис збігається з полярною віссю, а початок координат — із полюсом.

Розв'язання. $x = r \cos \varphi = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

$y = r \sin \varphi = 2 \sin \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. Отже, $A(1; \sqrt{3})$.

Відповідь. $A(1; \sqrt{3})$.

- 10.** Знайдіть полярні координати точки $A(1; \sqrt{3})$, якщо полюс збігається з початком координат, а полярна вісь — з додатним напрямом осі абсцис.

Розв'язання. $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$.

Отже, $A\left(2; \frac{\pi}{3}\right)$.

Відповідь. $A\left(2; \frac{\pi}{3}\right)$.

- 11.** Дано полярне рівняння лінії: $r^2 = 9 \sin 2\varphi$ (лемніскати Бернуллі). Запишіть її рівняння в декартовій системі координат.

Розв'язання. $r^2 = 9 \sin 2\varphi$, $r^2 = 18 \sin \varphi \cdot \cos \varphi$, $\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = 18 \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

$(x^2 + y^2)^2 = 18xy$ — рівняння даної лінії у декартовій системі координат.

Відповідь. $(x^2 + y^2)^2 = 18xy$.

VII. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Робот рухається по кімнаті, орієнтуючись за допомогою полярних координат. Спочатку він міститься у точці $(r = 2, \varphi = 0^\circ)$, потім повертається на 90° і рухається ще на 3 м.

1. Знайдіть нові полярні координати робота.

2. Знайдіть його положення у декартових координатах.

Розв'язання. 1. Перетворимо початкові полярні координати в декартові:

$$x_0 = r \cos \varphi = 2 \cos 0^\circ = 2 \cdot 1 = 2, \quad y_0 = r \sin \varphi = 2 \sin 0^\circ = 2 \cdot 0 = 0.$$

Початкова позиція в декартових координатах: $(x_0; y_0) = (2; 0)$.

Після повороту на 90° напрям руху спрямований під кутом 90° (вгору по осі y).

Пересування на 3 м дає зміщення:

$$\Delta x = 3 \cos 90^\circ = 3 \cdot 0 = 0, \quad \Delta y = 3 \sin 90^\circ = 3 \cdot 1 = 3.$$

Нові декартові координати: $x_1 = x_0 + \Delta x = 2 + 0 = 2, \quad y_1 = y_0 + \Delta y = 0 + 3 = 3$.

Отже, в декартових координатах нові координати робота: $(x_1; y_1) = (2; 3)$.

Перетворимо в полярні координати.

$$\text{Радіус } r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \approx 3,6.$$

$$\text{Полярний кут } \varphi_1 = \arctg \frac{y_1}{x_1} = \arctg \frac{3}{2} \approx 0,983.$$

Нові координати робота в полярних координатах:

$$(r_1; \varphi_1) = (\sqrt{13}; \arctg 1,5) \approx (3,6; 0,983).$$

Відповідь. $(3,6; 0,983), (2; 3)$.

VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Побудуйте точки, задані полярними координатами:

$$B(2; \pi), \quad C\left(3; -\frac{\pi}{4}\right), \quad D\left(4; \frac{22}{7}\right), \quad E(5; 2), \quad F(1; -1).$$

2. Визначте полярні координати точок, симетричних відносно полярної осі точкам

$$M_1\left(3; \frac{\pi}{2}\right), \quad M_2\left(2; -\frac{\pi}{2}\right), \quad M_3\left(3; -\frac{\pi}{3}\right), \quad M_4(1; 3), \quad M_5(5; -1),$$

заданих у полярній системі координат.

3. Визначте полярні координати точок, симетричних відносно полюса точкам

$$M_1\left(1; \frac{\pi}{4}\right), \quad M_2\left(5; \frac{\pi}{2}\right), \quad M_3\left(2; -\frac{\pi}{3}\right), \quad M_4\left(4; \frac{5\pi}{6}\right), \quad M_5(3; -2),$$

заданих у полярній системі координат.

4. У полярній системі координат задано точки $A\left(8; \frac{\pi}{2}\right)$ і $B\left(6; \frac{\pi}{3}\right)$. Визначте полярні координати середини відрізка AB .

- 10.** У полярній системі координат задані дві вершини рівностороннього трикутника $A\left(4; -\frac{\pi}{12}\right)$, $B\left(8; \frac{7\pi}{12}\right)$. Визначте його площу.
- 12.** Одна вершина трикутника OAB знаходиться на полюсі, дві інші вершини мають в полярній системі координат координати $A\left(5; \frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(4; \frac{\pi}{12}\right)$. Обчисліть площу трикутника.

Рівень С

- 1.** Обчисліть площу трикутника, вершини якого задано в полярних координатах:
 $A\left(3; \frac{\pi}{8}\right), B\left(8; \frac{7\pi}{4}\right), C\left(6; \frac{5\pi}{8}\right).$
- 2.** Знайдіть геометричне місце точок, полярні координати яких задовольняють рівняння:
1) $r = \frac{1}{\cos \varphi};$ 2) $r = \frac{1}{\sin \varphi}.$
- 3.** Дано правильний шестикутник $ABCDEF$. Уважаючи полярною віссю промінь AB , додатним напрямом відліку кутів — напрям найкоротшого повороту від AB до AC , а одиничним відрізком відрізок AB , визначте в цій системі полярні координати вершин шестикутника.
- 4.** Запишіть рівняння $r^2 = 9 \sin 2\varphi$ у декартовій системі координат.
- 5.** У полярній системі координат задані дві протилежні вершини квадрата $P\left(6; -\frac{7\pi}{12}\right)$ і $Q\left(4; \frac{\pi}{6}\right)$. Визначте площу квадрата.
- 6.** Обчисліть площу трикутника ABC , вершини якого $A\left(3; \frac{\pi}{8}\right), B\left(8; \frac{7\pi}{4}\right), C\left(6; \frac{5\pi}{8}\right)$ задані в полярних координатах.
- 7.** **Творче завдання.** Напишіть програму, за якою будуються фігури в полярній системі координат.

IX. Рефлексія (1–2 хв)

- | | | | | |
|-----------|---|-----|------------------------|----|
| 1. | Я знаю, які системи координат використовують в математиці. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я знаю основні практичні аспекти використання полярних координат. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я вмію позначати на площині точки, задані в полярних координатах. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

- 4.** Я вмію перетворювати координати точки із декартової системи координат у полярну і навпаки.
- | | | |
|-----|------------------------|----|
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
|-----|------------------------|----|
- 5.** Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту.
- | | | |
|-----|------------------------|----|
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
|-----|------------------------|----|

Можливі теми проєктів

- 1.** Застосування полярних координат в навігації і в астрономії.
- 2.** Полярні координати в моделюванні хвиль та коливань.
- 3.** Полярні координати в комп'ютерній графіці.
- 4.** Використання полярних координат у робототехніці.
- 5.** Застосування полярних координат у радарних і в сонарних системах.