

Тема 2.

Співвідношення між тригонометричними функціями

Урок 18. Застосування полярної системи координат

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) будувати точки в полярній системі координат;
- 2) обчислювати значення полярних координат точки за її декартовими координатами;
- 3) обчислювати значення декартових координат точки за її полярними координатами;
- 4) будувати графіки рівнянь, що задані в полярних координатах;
- 5) використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Спростіть вираз $\cos 4\alpha \cos \alpha - \sin 4\alpha \sin \alpha$.
2. Обчисліть значення виразу $2\sin 22,5^\circ \cos 22,5^\circ$.
3. Якого найменшого значення набуває функція $f(x) = 2\sin 3x - 2$?
4. Спростіть вираз $\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \operatorname{tg}^2 \alpha$.
5. Обчисліть значення виразу $\sin\left(\arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$.

III. Побудова точок у полярній системі координат

Нагадаємо, що положення будь-якої точки M на площині можна задати двома числами:

- 1) r — відстань від точки M до полюса ($r \geq 0$);
- 2) φ — кут між полярною віссю та відрізком OM (додатним напрямом відкладання кута вважається напрям проти годинникової стрілки).

Числа r и φ називаються *полярними координатами* точки M .

Щоб між точками та їхніми полярними координатами встановилася взаємно-однозначна відповідність, то на кут φ накладають обмеження $0 \leq \varphi < 2\pi$ (або $-\pi \leq \varphi < \pi$).

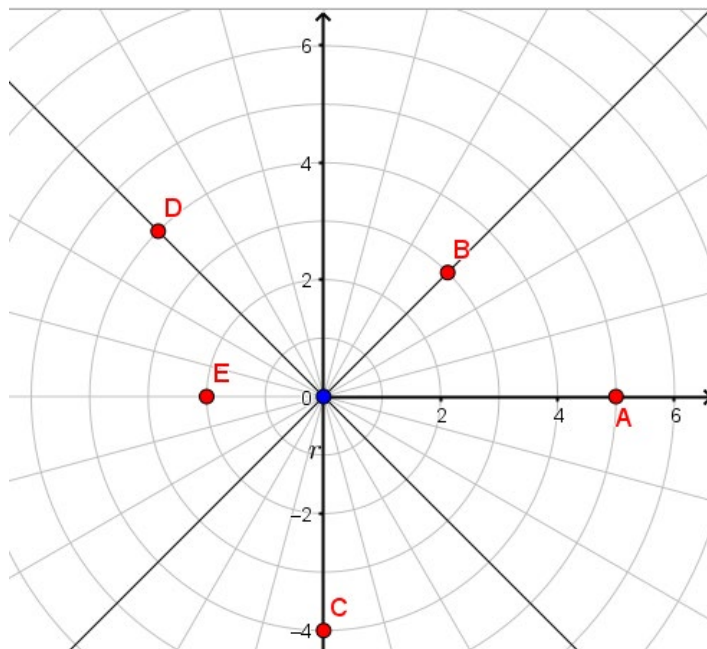
Алгоритм побудови точки $(r; \varphi)$, заданої у полярних координатах

1. Із полюса проводимо промінь під кутом φ до полярної осі.
2. На цьому промені від полюса відкладаємо відрізок, довжина якого дорівнює r ($r \geq 0$).

Приклад 1. Побудуйте точки, задані полярними координатами: $A(5; 0)$, $B\left(3; \frac{\pi}{4}\right)$,

$$C\left(4; -\frac{\pi}{2}\right), D\left(4; \frac{3\pi}{4}\right), E(2; \pi).$$

Розв'язання. За алгоритмом побудови точки, заданої у полярних координатах, зобразимо задані точки (див. рисунок).



IV. Обчислення полярних координат точки за її декартовими координатами

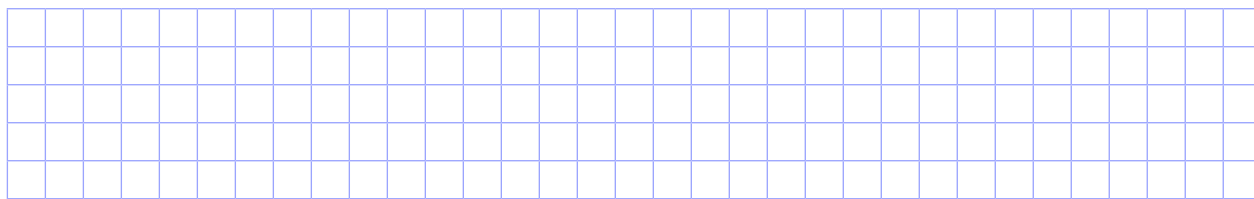
Нагадаємо формули переходу від декартових координат до полярних:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \end{cases}$$

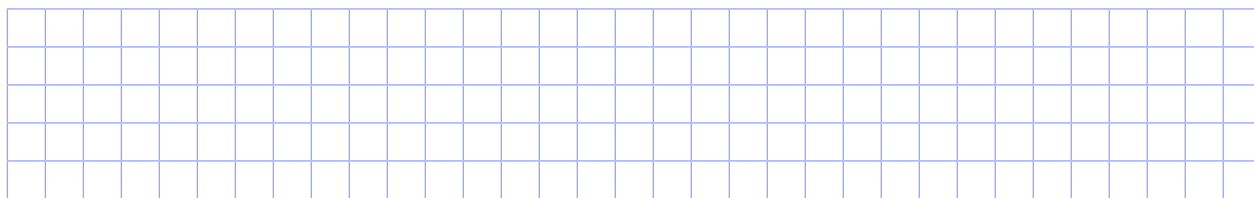
Із цих формул випливає, що $\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Формула $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$ визначає два кути $-\varphi$ і $\varphi + \pi$, у межах одного кола. Формули для косинуса і синуса уточнюють, який із цих кутів потрібно вибрати.

Приклад 2. У декартовій системі координат точка M має координати $(1; -1)$. Знайдіть полярні координати точки M .



Приклад 3. Запишіть рівняння $x^2 + y^2 = 2(\sqrt{x^2 + y^2} - x)$ у полярних координатах.



V. Побудова фігур, що задані в полярних координатах

Основні етапи при побудові графіків у полярній системі координат

1. Побудуйте полярну систему координат (зобразіть полюс, полярну вісь). Зазвичай проводять допоміжні промені через $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{8}$ або $\frac{\pi}{12}$ радіан, для більшості кривих цих точок цілком достатньо.
2. Табулюємо криву: послідовно беремо всі кути φ (див. вище): $0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \dots$ і для кожної точки обчислюємо значення $r(\varphi)$. Записуємо ці значення до таблиці.
3. Беремо побудовану в першому пункті полярну систему координат і відкладаємо точки. На полярній осі відкладаємо значення $r(0)$, на промені $\frac{\pi}{8} - r\left(\frac{\pi}{8}\right)$ тощо.
4. З'єднуємо всі точки плавною лінією. Отримуємо шукану криву. Для перевірки правильності можна додатково побудувати графік за допомогою онлайн-сервісів.
5. Якщо потрібно знайти рівняння кривої у декартовій системі координат, підставляємо відповідні формули: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ і виконуємо перетворення.

У полярній системі координат, аналогічно декартовій системі координат, за графіком функції $r = F(\varphi)$ можна побудувати графік функції $r = mF(\varphi + a) + b$.

Така побудова зводиться до простих геометричних перетворень графіка функції $r = F(\varphi)$ відповідно до наведених властивостей.

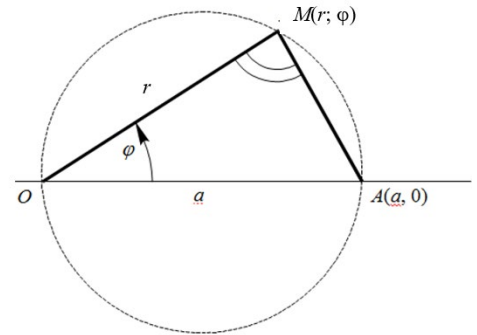
Перетворення графіків функцій у полярній системі координат.

1. Графік функції $r = -F(\varphi)$ є симетричним графіку функції $r = F(\varphi)$ відносно полюса.

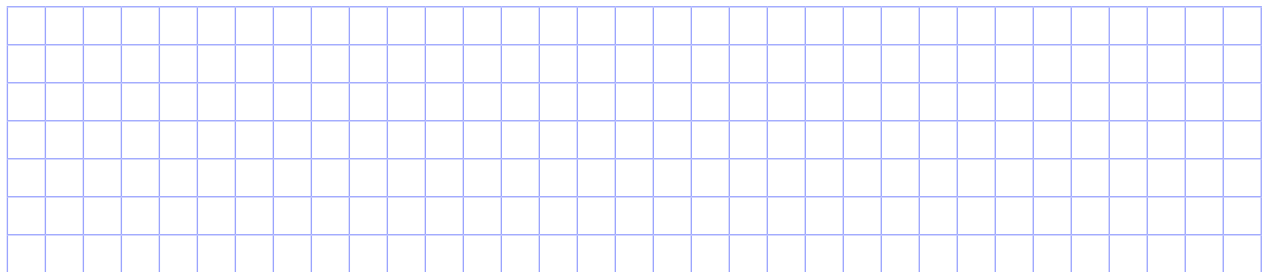
2. Графік функції $r = F(-\varphi)$ є симетричним графіку функції $r = F(\varphi)$ відносно полярної осі.
3. Графік функції $r = mF(\varphi)$, де $m > 0$, є графіком функції $r = F(\varphi)$, розтягнутим або стиснутим уздовж полярної осі в m разів.
4. Графік функції $r = F(\varphi + \alpha)$ — це графік, отриманий із графіка функції $r = F(\varphi)$ поворотом на кут α .
5. Графік функції $r = F(\varphi) + b$ — це графік функції $r = F(\varphi)$, паралельно перенесений уздовж полярної осі на відстань b .

Приклад 4. Яку криву визначає рівняння $r = a \cdot \cos \varphi$, де $a > 0$, а r і φ — полярні координати?

Розв'язання. Позначимо через M точку з полярними координатами $(r; \varphi)$, а через точку A — точку з полярними координатами $(a; 0)$. Якщо $r = a \cdot \cos \varphi$, то $\angle OMA$ є прямим (див. рисунок). Отже, геометричне місце точок, полярні координати яких задовольняють рівняння $r = a \cdot \cos \varphi$, є колом із діаметром OA .



Приклад 5. Переведіть рівняння фігур $x^2 + y^2 - 6y = 0$, $y = x$ у полярну систему координат та побудуйте їх.



VI. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Під час святкового шоу прожектор, встановлений у центрі площі, обертається навколо своєї осі, спрямовує промінь світла на землю. Світлова пляма рухається по траєкторії, що описується рівнянням $r = 4 \sin 3\varphi$ у полярних координатах.

1. Побудуйте траєкторію руху світлової плями у полярних координатах.
2. Скільки «пелюсток» утворює ця крива і якої вони довжини?
3. Як зміниться траєкторія, якщо рівняння фігури замінити на $r = 4 \cos 3\varphi$ або $r = 4 \sin 4\varphi$?
4. Поекспериментуйте з графіком цієї функції за допомогою Geogebra-аплету:

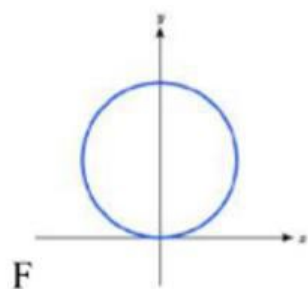
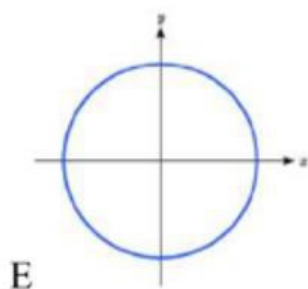
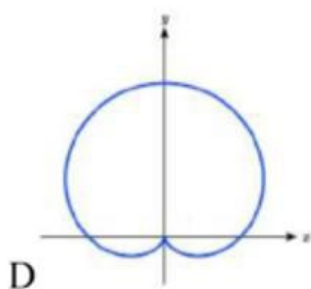
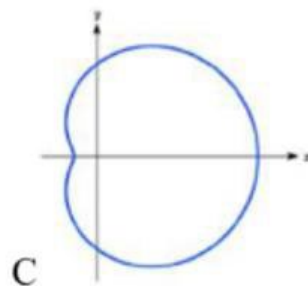
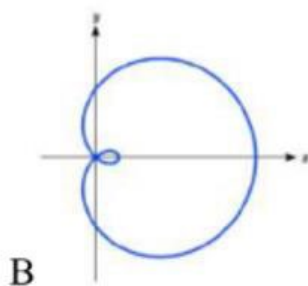
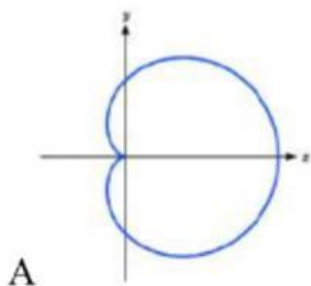
<https://www.geogebra.org/m/cupecr3t> _____



VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

- Перетворіть полярні координати точок у декартові:
1) $\left(7; \frac{7\pi}{6}\right)$; 2) $\left(6; \frac{3\pi}{4}\right)$; 3) $\left(4; \frac{7\pi}{4}\right)$; 4) $\left(9; \frac{4\pi}{3}\right)$.
- Перетворіть декартові координати в полярні:
1) (4; 2); 2) (8; 8); 3) (6; 3); 4) (0; 4).
- Перетворіть рівняння задане в декартових координатах на рівняння задане в полярних координатах:
1) $x = 3$; 2) $y = 4$; 3) $y = 4x$; 4) $y = -2x$.
- Перетворіть рівняння задане в полярних координатах на рівняння задане в декартових координатах:
1) $r = 3 \sin \varphi$; 2) $r = 4 \cos \varphi$.
- Увідповідніть рівняння (1 – 6) із наведеними графіками (А – F).
1) $r = 2(1 + \cos \varphi)$; 2) $r = 2(1 + \sin \varphi)$; 3) $r = 4 + 3 \cos \varphi$;
4) $r = 3 + 4 \cos \varphi$; 5) $r = 5$; 6) $r = 2 \sin \varphi$.



- Побудуйте графік рівняння, заданого в полярній системі координат:
1) $r = 3 \cos \varphi$; 2) $r = 4 \sin \varphi$.

Рівень В

- Перетворіть полярні координати точок у декартові:
1) $\left(6; -\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $\left(12; -\frac{\pi}{3}\right)$; 3) $\left(3; -\frac{\pi}{6}\right)$; 4) $\left(2; -\frac{2\pi}{3}\right)$.
- Перетворіть декартові координати в полярні:
1) (-4; 6); 2) (3; -5); 3) (-5; 1); 4) (-10; -13).

- 3.** Перетворіть рівняння задане в декартових координатах на рівняння задане в полярних координатах:

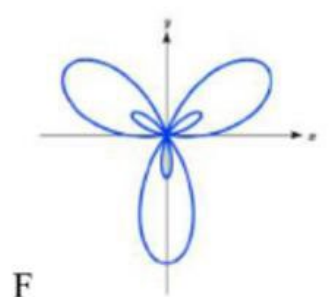
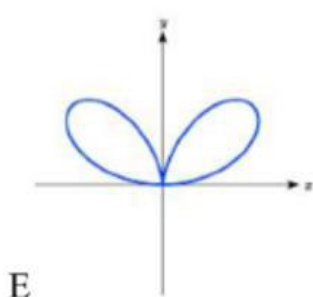
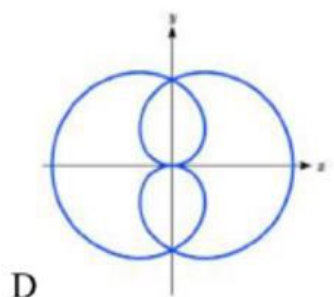
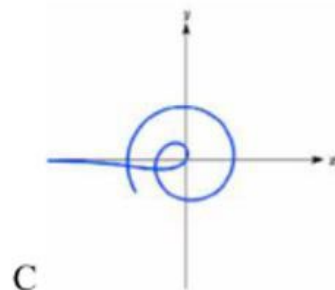
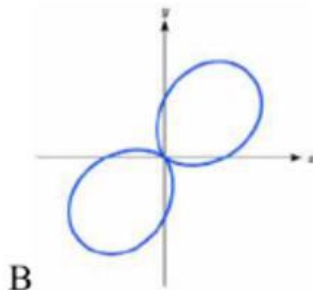
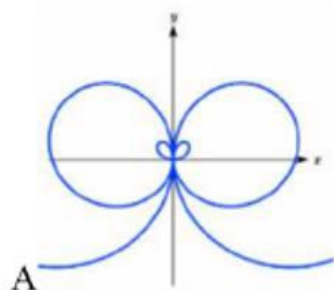
1) $x = 3y^2$; 2) $x = 2y^4$; 3) $y = 4x^2$; 4) $y = -3x^4$.

- 4.** Перетворіть рівняння задане в полярних координатах на рівняння задане в декартових координатах:

1) $r = \frac{4}{\sin \varphi + 7 \cos \varphi}$; 2) $r = \frac{6}{\cos \varphi + 3 \sin \varphi}$.

- 5.** У відповідність рівняння (1 – 4) із наведеними графіками (А – F).

1) $r = \varphi \cos \varphi$; 2) $r = \cos \frac{\varphi}{2}$; 3) $r = \sin \varphi \cos^2 \varphi$; 4) $r = 1 + 2 \sin 3\varphi$.



- 6.** Побудуйте графік рівняння, заданого в полярній системі координат:

1) $r = 3 \sin 2\varphi$; 2) $r = 4 \sin 4\varphi$; 3) $r = 3 \cos 2\varphi$; 4) $r = 4 \cos 4\varphi$.

- 7.** Побудуйте криву $(x^2 + y^2)^2 = 2x^3$, попередньо перетворивши дане рівняння в полярні координати.

- 8.** Побудуйте гіперболічну спіраль — криву, задану рівнянням $r = \frac{4}{\varphi}$.

- 9.** Побудуйте спіраль Галілея — криву, задану рівнянням $r = 3\varphi^2$.

- 10.** Побудуйте графік рівняння $r = \frac{1}{\sqrt{\varphi}}$, яке називають літуус.

- 11.** Побудуйте графік рівняння $r = 2 \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi$, яке називають цисоїда.

- 12.** Побудуйте графік рівняння $r = 3 + \frac{1}{\cos \varphi}$, яке називають конхоїда.

Рівень С

- 1.** Перетворіть полярні координати точок в декартові:

1) (3; 2); 2) (4; 5); 3) (2; -1); 4) (7; -3).

- 2.** Перетворіть рівняння задане в декартових координатах на рівняння задане в полярних координатах:
- 1) $x^2 = y^2 - 4y$; 2) $x^2 = 2y^2 + y$; 3) $y^2 = 4x^2 - 3x$; 4) $y^2 = -3x^2 + 2x$.
- 3.** Перетворіть рівняння задане в полярних координатах на рівняння задане в декартових координатах:
- 1) $r = \sqrt{r \cos \varphi + 2}$; 2) $r^2 = \frac{4}{\sin \varphi \cos \varphi}$.
- 4.** Побудуйте криву, задану рівнянням $r = 1 + \cos 3\varphi + \sin^2 3\varphi$, який називають листом конюшини.
- 5.** Людина рухається зі сталою швидкістю по каруселі, вздовж її радіуса. Опишіть її траєкторію відносно землі. Задайте цю траєкторію рівнянням в полярній системі координат.
- 6.** Побудуйте криву $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$ — лемніскату Бернуллі, попередньо перетворивши дане рівняння в полярні координати.

Рефлексія

- 1) На уроці я дізнався/дізналася
-
-
- 2) Мені найбільше запам'яталося
-
-
- 3) Для мене було найцікавішим
-
-
- 4) Для мене було найскладнішим
-
-
- 5) Я припустився/припустилася помилки
-
-
- 6) Я хочу повторити, аби краще зрозуміти
-
-
- 7) Поради собі до наступного уроку
-
-

Можливі теми проєктів

1. Дослідження графіка «пелюстки троянди» в полярній системі координат.
2. Побудова лемніскат та інших кривих у полярній системі координат.
3. Використання полярних координат у дизайні.
4. Порівняння геометричних перетворень для графіків заданих у декартовій і в полярних системах координат.
5. Вивчення спіралей в полярній системі координат та їхнє використання в радіотехніці, в навігації, у плануванні доріг.







