

11

Тема 2. Співвідношення між тригонометричними функціями

Урок 18. Застосування полярної системи координат

Тип уроку: урок формування вмінь і навичок.

План уроку

1. Побудова точок у полярній системі координат.
2. Обчислення полярних координат точки за її декартовими координатами.
3. Побудова фігур, що задані в полярних координатах.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

висловлює власне ставлення до здобутої інформації та нові ідеї, які виникли в результаті аналізу інформаційних джерел, наводить контраргументи [12 МАО 1.2.1–2 П];

самостійно або у співпраці з іншими будує математичні моделі специфічних проблемних ситуацій, добирає математичні засоби для побудови моделей, ураховуючи можливі ризики [12 МАО 2.3.2–1 П];

використовує приладдя та інформаційно-комунікаційні технології для представлення результату у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 4.2.3–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.

6) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чому в деяких випадках зручніше будувати графіки в полярній системі координат?

2) Які реальні об'єкти зручніше описувати за допомогою полярних координат?

3) Чи можна використати графічні калькулятори для побудови графіків функцій в полярних координатах?

4) Чи можуть графіки в полярних координатах бути корисними в техніці або в природничих науках?

5) Чи можна за допомогою полярних координат описувати орбіти планет або траєкторії супутників?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Спростіть вираз $\cos 4\alpha \cos \alpha - \sin 4\alpha \sin \alpha$.

Відповідь. $\cos 5\alpha$.

2. Обчисліть значення виразу $2 \sin 22,5^\circ \cos 22,5^\circ$.

Відповідь. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Якого найменшого значення набуває функція $f(x) = 2 \sin 3x - 2$?

Відповідь. -4 .

4. Спростіть вираз $\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \operatorname{tg}^2 \alpha$.

Відповідь. 1.

5. Обчисліть значення виразу $\sin\left(\arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$.

Відповідь. $-\frac{1}{2}$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Під час святкового шоу прожектор, встановлений у центрі площі, обертається навколо своєї осі, спрямовує промінь світла на землю. Світлова пляма рухається по траєкторії, що описується рівнянням $r = 4 \sin 3\varphi$ у полярних координатах.

1. Побудуйте траєкторію руху світлової плями у полярних координатах.
2. Скільки «пелюсток» утворює ця крива і якої вони довжини?
3. Як зміниться траєкторія, якщо рівняння фігури замінити на $r = 4 \cos 3\varphi$ або $r = 4 \sin 4\varphi$?
4. Поекспериментуйте з графіком цієї функції за допомогою Geogebra-аплету:

<https://www.geogebra.org/m/cupecr3t>



III. Побудова точок у полярній системі координат

Нагадаємо, що положення будь-якої точки M на площині можна задати двома числами:

- 1) r — відстань від точки M до полюса ($r \geq 0$);
- 2) φ — кут між полярною віссю та відрізком OM (додатним напрямом відкладання кута вважається напрям проти годинникової стрілки).

Числа r і φ називаються *полярними координатами* точки M .

Щоб між точками та їхніми полярними координатами встановилася взаємно-однозначна відповідність, то на кут φ накладають обмеження $0 \leq \varphi < 2\pi$ (або $-\pi \leq \varphi < \pi$).

Алгоритм побудови точки $(r; \varphi)$, заданої у полярних координатах

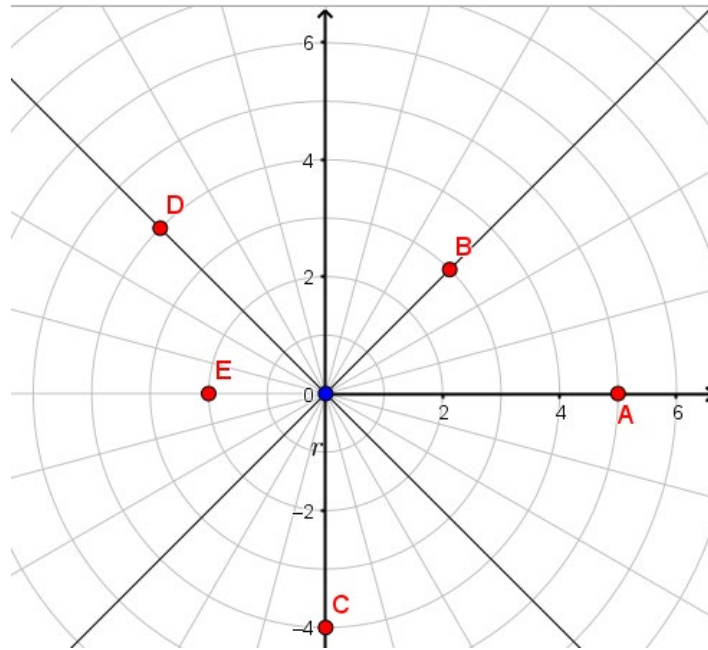
1. Із полюса проводимо промінь під кутом φ до полярної осі.
2. На цьому промені від полюса відкладаємо відрізок, довжина якого дорівнює r ($r \geq 0$).

Ілюстративні приклади

6. Побудуйте точки, задані полярними координатами: $A(5; 0)$, $B\left(3; \frac{\pi}{4}\right)$, $C\left(4; -\frac{\pi}{2}\right)$,

$$D\left(4; \frac{3\pi}{4}\right), E(2; \pi).$$

Розв'язання. За алгоритмом побудови точки, заданої у полярних координатах, зобразимо задані точки (див. рисунок).



IV. Обчислення полярних координат точки за її декартовими координатами

Нагадаємо формули переходу від декартових координат до полярних:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \end{cases}$$

Із цих формул випливає, що $\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Формула $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$ визначає два кути $-\varphi$ і $\varphi + \pi$, у межах одного кола. Формули для косинуса і синуса уточнюють, який із цих кутів потрібно вибрати.

Ілюстративні приклади

- 7.** У декартовій системі координат точка M має координати $(1; -1)$. Знайдіть полярні координати точки M .

Розв'язання. Оскільки $x = 1$, $y = -1$, то $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{-1}{1} = -1$,

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Оскільки $\cos \varphi > 0$, а $\sin \varphi < 0$, то φ — кут четвертої чверті, тобто $\varphi = \frac{7\pi}{4}$.

Отже, $M\left(\sqrt{2}; \frac{7\pi}{4}\right)$.

Відповідь. $M\left(\sqrt{2}; \frac{7\pi}{4}\right)$.

8. Запишіть рівняння $x^2 + y^2 = 2(\sqrt{x^2 + y^2} - x)$ у полярних координатах.

Розв'язання. Оскільки $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, то

$$r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = 2(\sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} - r \cos \varphi),$$

$$r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 2(\sqrt{r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} - r \cos \varphi),$$

$$r^2 = 2r(1 - \cos \varphi), \quad r = 2(1 - \cos \varphi).$$

Відповідь. $r = 2(1 - \cos \varphi)$.

V. Побудова фігур, що задані в полярних координатах

Основні етапи при побудові графіків у полярній системі координат

1. Побудуйте полярну систему координат (зобразіть полюс, полярну вісь). Зазвичай проводять допоміжні промені через $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{8}$ або $\frac{\pi}{12}$ радіан, для більшості кривих цих точок цілком достатньо.
2. Табулюємо криву: послідовно беремо всі кути φ (див. вище): $0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \dots$ і для кожної точки обчислюємо значення $r(\varphi)$. Записуємо ці значення до таблиці.
3. Беремо побудовану в першому пункті полярну систему координат і відкладаємо точки. На полярній осі відкладаємо значення $r(0)$, на промені $\frac{\pi}{8} - r\left(\frac{\pi}{8}\right)$ тощо.
4. З'єднуємо всі точки плавною лінією. Отримуємо шукану криву. Для перевірки правильності можна додатково побудувати графік за допомогою онлайн-сервісів.
5. Якщо потрібно знайти рівняння кривої у декартовій системі координат, підставляємо відповідні формули: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ і виконуємо перетворення.

У полярній системі координат, аналогічно декартовій системі координат, за графіком функції $r = F(\varphi)$ можна побудувати графік функції $r = mF(\varphi + \alpha) + b$.

Така побудова зводиться до простих геометричних перетворень графіка функції $r = F(\varphi)$ відповідно до наведених властивостей.

Перетворення графіків функцій у полярній системі координат.

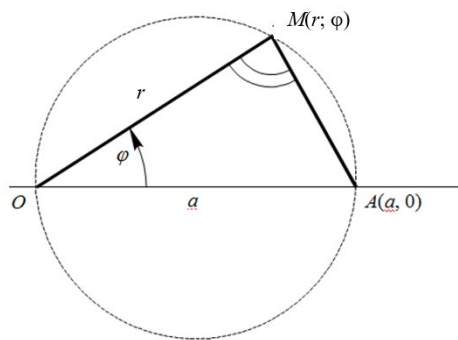
1. Графік функції $r = -F(\varphi)$ є симетричним графіку функції $r = F(\varphi)$ відносно полюса.
2. Графік функції $r = F(-\varphi)$ є симетричним графіку функції $r = F(\varphi)$ відносно полярної осі.
3. Графік функції $r = mF(\varphi)$, де $m > 0$, є графіком функції $r = F(\varphi)$, розтягнутим або стиснутим уздовж полярної осі в m разів.
4. Графік функції $r = F(\varphi + \alpha)$ — це графік, отриманий із графіка функції $r = F(\varphi)$ поворотом на кут α .
5. Графік функції $r = F(\varphi) + b$ — це графік функції $r = F(\varphi)$, паралельно перенесений уздовж полярної осі на відстань b .

Ілюстративні приклади

- 9.** Яку криву визначає рівняння $r = a \cdot \cos \varphi$, де $a > 0$, а r і φ — полярні координати?

Розв'язання. Позначимо через M точку з полярними координатами $(r; \varphi)$, а через точку A — точку з полярними координатами $(a; 0)$. Якщо $r = a \cdot \cos \varphi$, то $\angle OMA$ є прямим (див. рисунок).

Отже, геометричне місце точок, полярні координати яких задовольняють рівняння $r = a \cdot \cos \varphi$, є колом із діаметром OA .



- 10.** Переведіть рівняння фігур $x^2 + y^2 - 6y = 0$, $y = x$ у полярну систему координат та побудуйте їх.

Розв'язання. За формулами переходу $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, підставимо x та y у рівняння $x^2 + y^2 - 6y = 0$: $(r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2 - 6r \sin \varphi = 0$,

$$r^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) - 6r \sin \varphi = 0, \quad r^2 - 6r \sin \varphi = 0, \quad r = 6 \sin \varphi.$$

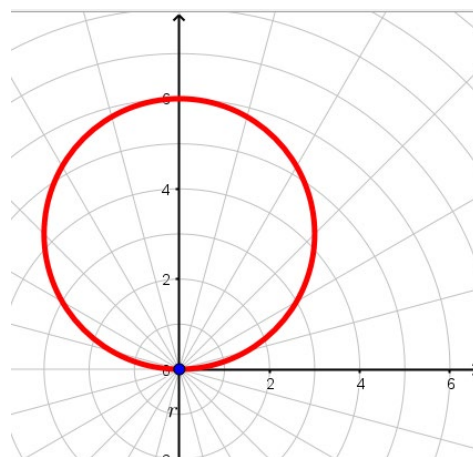
Отже, у полярних координатах рівняння кола набуває вигляду $r = 6 \sin \varphi$.

Для побудови графіка складемо таблицю значень φ та відповідних їм значень r . Кути φ візьмемо такі, синуси яких відомі.

Оскільки $6 \sin \varphi \geq 0$ при $\varphi \in [0; \pi]$, то кути будемо вибирати лише з цього проміжку.

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	0	3	$\approx 4,24$	$\approx 5,2$	6	$\approx 5,2$	$\approx 4,24$	3	0

Позначимо точки на полярній площині і плавно їх з'єднаємо (див. рисунок).

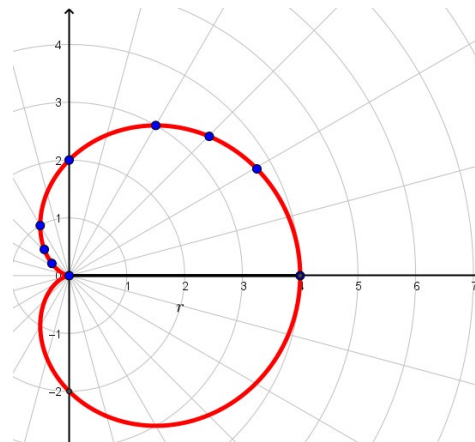


- 11.** Побудуйте в полярній системі координат графік функції $r = 2(1 + \cos \varphi)$.

Розв'язання.

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	4	$\approx 3,7$	$\approx 3,4$	3	2	1	$\approx 0,6$	$\approx 0,3$	0

Оскільки $\cos(-\varphi) = \cos \varphi$, то графік симетричний відносно полярної осі (див. рисунок).



VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Під час святкового шоу прожектор, встановлений у центрі площі, обертається навколо своєї осі, спрямовує промінь світла на землю. Світлова пляма рухається по траєкторії, що описується рівнянням $r = 4 \sin 3\varphi$ у полярних координатах.

1. Побудуйте траєкторію руху світлової плями у полярних координатах.
2. Скільки «пелюсток» утворює ця крива і якої вони довжини?
3. Як зміниться траєкторія, якщо рівняння фігури замінити на $r = 4 \cos 3\varphi$ або $r = 4 \sin 4\varphi$?
4. Поекспериментуйте з графіком цієї функції за допомогою Geogebra-аплету:



<https://www.geogebra.org/m/cupecr3t>

Розв'язання. Складемо таблицю для значень полярного кута на проміжку $[0; 2\pi]$

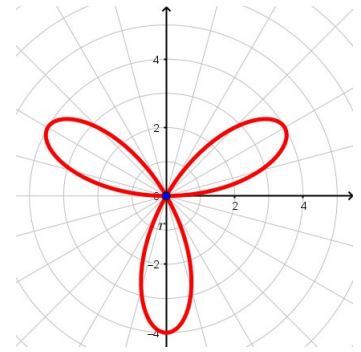
із кроком $\frac{\pi}{12}$.

φ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	π
r	0	$2\sqrt{2}$	4	$2\sqrt{2}$	0	$-2\sqrt{2}$	-4	$-2\sqrt{2}$	0	$2\sqrt{2}$	4	$2\sqrt{2}$	0

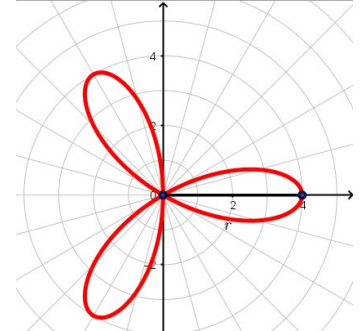
φ	$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{19\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{23\pi}{12}$	2π
r	$-2\sqrt{2}$	-4	$-2\sqrt{2}$	0	$2\sqrt{2}$	4	$2\sqrt{2}$	0	$-2\sqrt{2}$	-4	$-2\sqrt{2}$	0

Варто звернути увагу, що при від'ємних значеннях r , точок на площині ми не ставимо.

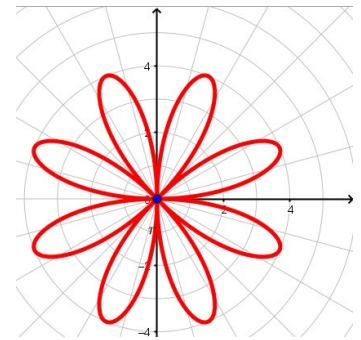
Графік має три пелюстки і має спеціальну назву «трипелюсткова троянда».



Графік функції $r = 4 \cos 3\varphi$ можна отримати з попереднього поворотом на $\frac{\pi}{2}$ навколо полюса (див. рисунок).



Графік функції $r = 4 \sin 4\varphi$ має 8 «пелюсток» (див. рисунок).



VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Перетворіть полярні координати точок у декартові:

1) $\left(7; \frac{7\pi}{6}\right);$	2) $\left(6; \frac{3\pi}{4}\right);$	3) $\left(4; \frac{7\pi}{4}\right);$	4) $\left(9; \frac{4\pi}{3}\right).$
--------------------------------------	--------------------------------------	--------------------------------------	--------------------------------------
2. Перетворіть декартові координати в полярні:

1) (4; 2);	2) (8; 8);	3) (6; 3);	4) (0; 4).
------------	------------	------------	------------
3. Перетворіть рівняння задане в декартових координатах на рівняння задане в полярних координатах:

1) $x = 3;$	2) $y = 4;$	3) $y = 4x;$	4) $y = -2x.$
-------------	-------------	--------------	---------------
4. Перетворіть рівняння задане в полярних координатах на рівняння задане в декартових координатах:

1) $r = 3 \sin \varphi;$	2) $r = 4 \cos \varphi.$
--------------------------	--------------------------

5. У відповідність рівняння (1 – 6) із наведеними графіками (А – F).

1) $r = 2(1 + \cos \varphi)$;

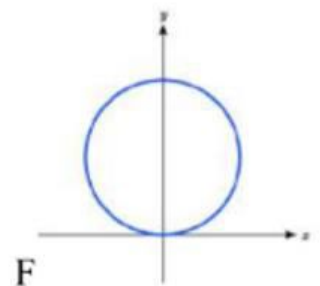
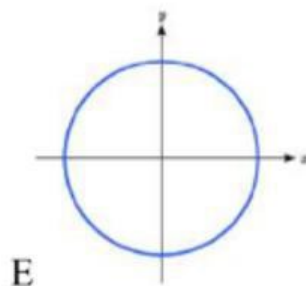
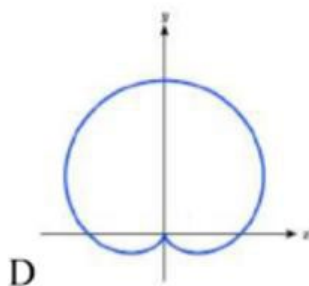
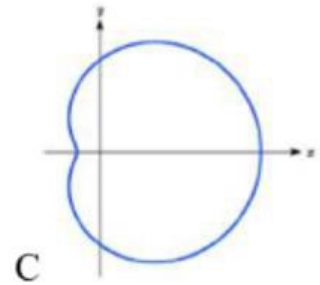
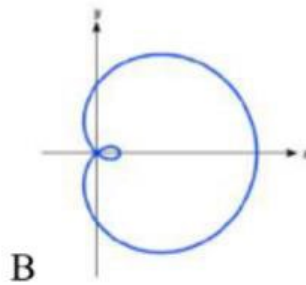
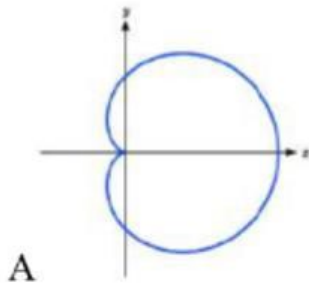
2) $r = 2(1 + \sin \varphi)$;

3) $r = 4 + 3 \cos \varphi$;

4) $r = 3 + 4 \cos \varphi$;

5) $r = 5$;

6) $r = 2 \sin \varphi$.



6. Побудуйте графік рівняння, заданого в полярній системі координат:

1) $r = 3 \cos \varphi$;

2) $r = 4 \sin \varphi$.

Рівень В

1. Перетворіть полярні координати точок у декартові:

1) $\left(6; -\frac{\pi}{4}\right)$;

2) $\left(12; -\frac{\pi}{3}\right)$;

3) $\left(3; -\frac{\pi}{6}\right)$;

4) $\left(2; -\frac{2\pi}{3}\right)$.

2. Перетворіть декартові координати в полярні:

1) $(-4; 6)$;

2) $(3; -5)$;

3) $(-5; 1)$;

4) $(-10; -13)$.

3. Перетворіть рівняння задане в декартових координатах на рівняння задане в полярних координатах:

1) $x = 3y^2$;

2) $x = 2y^4$;

3) $y = 4x^2$;

4) $y = -3x^4$.

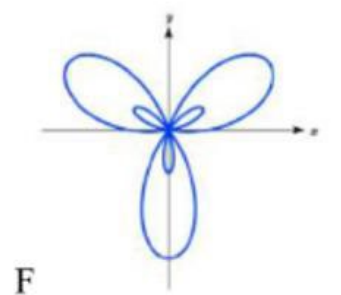
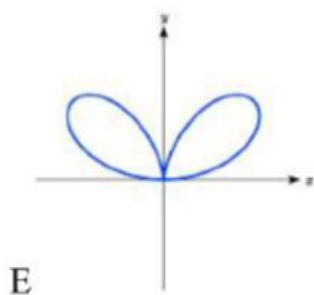
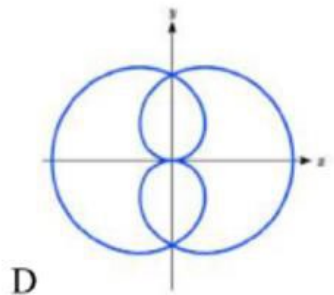
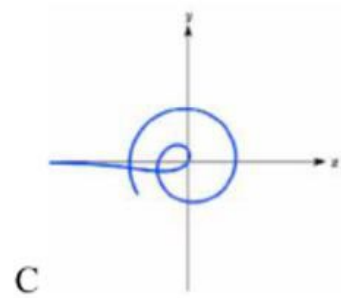
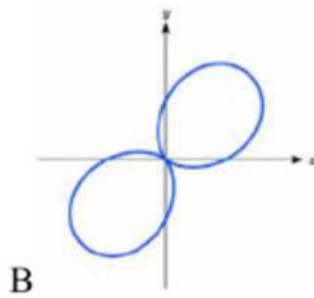
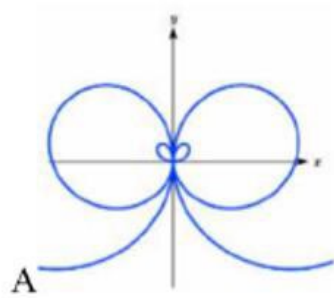
4. Перетворіть рівняння задане в полярних координатах на рівняння задане в декартових координатах:

1) $r = \frac{4}{\sin \varphi + 7 \cos \varphi}$;

2) $r = \frac{6}{\cos \varphi + 3 \sin \varphi}$.

5. У відповідність рівняння (1 – 4) із наведеними графіками (А – F).

- 1) $r = \varphi \cos \varphi$; 2) $r = \cos \frac{\varphi}{2}$; 3) $r = \sin \varphi \cos^2 \varphi$; 4) $r = 1 + 2 \sin 3\varphi$.



6. Побудуйте графік рівняння, заданого в полярній системі координат:

- 1) $r = 3 \sin 2\varphi$; 2) $r = 4 \sin 4\varphi$; 3) $r = 3 \cos 2\varphi$; 4) $r = 4 \cos 4\varphi$.

7. Побудуйте криву $(x^2 + y^2)^2 = 2x^3$, попередньо перетворивши дане рівняння в полярні координати.

8. Побудуйте гіперболічну спіраль — криву, задану рівнянням $r = \frac{4}{\varphi}$.

9. Побудуйте спіраль Галілея — криву, задану рівнянням $r = 3\varphi^2$.

10. Побудуйте графік рівняння $r = \frac{1}{\sqrt{\varphi}}$, яке називають літуус.

11. Побудуйте графік рівняння $r = 2 \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi$, яке називають цисоїда.

12. Побудуйте графік рівняння $r = 3 + \frac{1}{\cos \varphi}$, яке називають конхоїда.

Рівень С

1. Перетворіть полярні координати точок в декартові:

- 1) (3; 2); 2) (4; 5); 3) (2; -1); 4) (7; -3).

2. Перетворіть рівняння задане в декартових координатах на рівняння задане в полярних координатах:

- 1) $x^2 = y^2 - 4y$; 2) $x^2 = 2y^2 + y$; 3) $y^2 = 4x^2 - 3x$; 4) $y^2 = -3x^2 + 2x$.

3. Перетворіть рівняння задане в полярних координатах на рівняння задане в декартових координатах:

- 1) $r = \sqrt{r \cos \varphi + 2}$; 2) $r^2 = \frac{4}{\sin \varphi \cos \varphi}$.

4. Побудуйте криву, задану рівнянням $r = 1 + \cos 3\varphi + \sin^2 3\varphi$, який називають листом конюшини.
5. Людина рухається зі сталою швидкістю по каруселі, вздовж її радіуса. Опишіть її траєкторію відносно землі. Задайте цю траєкторію рівнянням в полярній системі координат.
6. Побудуйте криву $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$ — лемніскату Бернуллі, попередньо перетворивши дане рівняння в полярні координати.

IX. Рефлексія (1–2 хв)

- 1) На уроці я дізнався/дізналася
- 2) Мені найбільше запам'яталося
- 3) Для мене було найцікавішим
- 4) Для мене було найскладнішим
- 5) Я припустився/припустилася помилки
- 6) Я хочу повторити, аби краще зрозуміти
- 7) Поради собі до наступного уроку

Можливі теми проєктів

1. Дослідження графіка «пелюстки троянди» в полярній системі координат.
2. Побудова лемніскат та інших кривих у полярній системі координат.
3. Використання полярних координат у дизайні.
4. Порівняння геометричних перетворень для графіків заданих у декартовій і в полярних системах координат.
5. Вивчення спіралей в полярній системі координат та їхнє використання в радіотехніці, в навігації, у плануванні доріг.