

11

Тема 2. Співвідношення між тригонометричними функціями

Урок 2. Урок–практикум. Розв’язування задач. Залежність між тригонометричними функціями одного кута

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) навчитеся обчислювати значення тригонометричних функцій кутів по заданому значенню однієї з них;
- 2) навчитеся спрощувати та перетворювати тригонометричні вирази, використовуючи основну тригонометричну тотожність;
- 3) отримаєте поради щодо використання основних тригонометричних тотожностей;
- 4) навчитеся використовувати набуті знання для розв’язування практичних задач.

II. Повторення

1. Чому дорівнює косинус кута, синус якого дорівнює 0?
2. Спростіть вираз $(1 - 4y)(4y + 1)$.
3. Розкладіть на множники вираз $8x^3 - 27y^6$.
4. Чому дорівнює сума $x^4 + y^4$, якщо $x^2 + y^2 = 1$, а $xy = \frac{1}{2}$?
5. Відомо, що $x = 3 \operatorname{ctg} \alpha$, $y = \frac{1}{9} \operatorname{tg} \alpha$. Знайдіть xy .

III. Обчислення значень тригонометричних функцій кутів по заданому значенню однієї з них

Таблиця формул для обчислення значень тригонометричних функцій кутів по заданому значенню однієї з них

	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$\sin \alpha$		$\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$\pm \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$
$\cos \alpha$	$\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$		$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$\pm \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\pm \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$		$\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$	$\pm \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$	

Вивчати всі формули не обов'язково. Варто запам'ятати лише певні формули й правила.

1) Якщо дано синус або косинус кута, то, за основною тригонометричною тотожністю $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, можна знайти відповідно косинус або синус.

Якщо задана чверть, у якій лежить кут α , то варто врахувати знак тригонометричної функції, якого набуває шукана тригонометрична функція в цій чверті.

За означенням тангенса або котангенса, знаходимо їхні значення.

2) Якщо дано тангенс або котангенс, то для знаходження синуса або косинуса варто скористатися формулами $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ або $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$.

Для знаходження котангенса або тангенса потрібно пам'ятати, що $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$.

Із означень тангенса або котангенса маємо:

$$\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha \text{ та } \cos \alpha = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \sin \alpha.$$

Приклад 1. Знайдіть $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\sin \alpha = -\frac{7}{25}$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Розв'язання. Маємо $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{7}{25}\right)^2 = 1 - \frac{49}{625} = \frac{576}{625}$.

Оскільки $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\cos \alpha < 0$. Отже, $\cos \alpha = -\frac{24}{25}$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{7}{25} : \left(-\frac{24}{25}\right) = \frac{7}{24}. \text{ Тоді } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{24}{7}.$$

Відповідь. $\cos \alpha = -\frac{24}{25}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{24}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{24}{7}$.

Приклад 2. Знайдіть $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = -2$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

[illegible]

IV. Спрощення виразів з використанням залежностей між тригонометричними функціями одного кута

Поради учню/учениці при перетворенні найпростіших тригонометричних виразів

1. При виконанні вправ замість α можуть бути інші вирази, але це не означає, що не можна використовувати вивчені формули.

Правильними будуть також рівності:

$$\cos^2(5\beta - 2) + \sin^2(5\beta - 2) = 1 \text{ а } \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}} \text{ тощо.}$$

- 2.** Пам'ятайте, що $1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$, $1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$, $\sin^2 \alpha - 1 = -\cos^2 \alpha$, $\cos^2 \alpha - 1 = -\sin^2 \alpha$.
- 3.** Іноді замість 1 записують $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$. Цей вираз називається тригонометричною одиницею.
- 4.** Якщо вираз містить тангенси або котангенси, то спробуйте подати їх, за означенням, у вигляді дробових виразів: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.
- 5.** Не забувайте про формули скороченого множення.

Приклад 3. Спростіть вираз $\left(\cos \frac{x}{3}-1\right)\left(\cos \frac{x}{3}+1\right)$.

[illegible]

Приклад 4. Спростіть вираз $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}$.

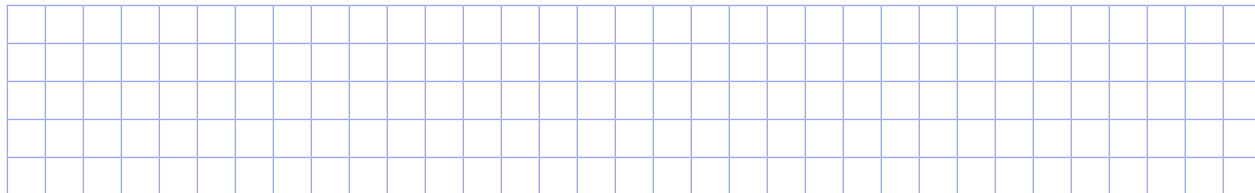
[illegible]

Приклад 5. Спростіть вираз $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$.

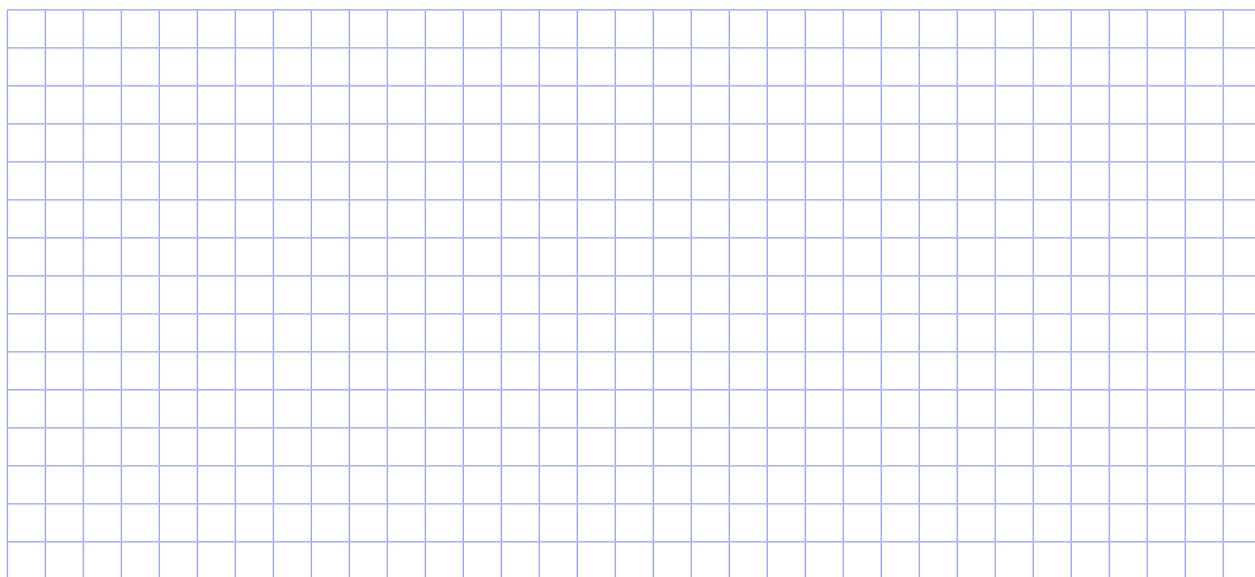
Розв'язання.
$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha(1 - \cos \alpha) - \sin \alpha(1 + \cos \alpha)}{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)} =$$
$$= \frac{\sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = -\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = -2 \operatorname{ctg} \alpha.$$

Відповідь. $-2 \operatorname{ctg} \alpha$.

Приклад 6. Спростіть вираз $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha}$.



Приклад 7. Побудуйте графік функції $y = \operatorname{tg}^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^2 x$.



V. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Інтенсивність y сигналу радіостанції залежить від напрямку антени, що обертається, і обчислюється за допомогою функції $y = 100 \cos^2 x + 60 \sin^2 x$. Обчисліть, при якому значенні x ($0^\circ < x < 360^\circ$) інтенсивність сигналу становитиме 80% від максимального?

Задача 2. Олімпіадна задача. Для деякого кута α числа $\sin \alpha$ та $\cos \alpha$ є коренями квадратного рівняння $5x^2 - 3x + c = 0$. Знайдіть значення параметра c .

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Знайдіть $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$ і $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.
2. Знайдіть $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = -5$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.
3. Спростіть вираз:
 - 1) $1 - \cos^2 \alpha$;
 - 2) $\sin^2 \alpha - 1$;
 - 3) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha$;
 - 4) $\sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha - \cos \alpha$;
 - 5) $\frac{\cos^2 \alpha - 1}{\sin^2 \alpha - 1}$;
 - 6) $\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$.
4. Спростіть вираз:
 - 1) $2\sin^2 \alpha + 2\cos^2 \alpha$;
 - 2) $-\sin^2 x - \cos^2 x$.
 - 3) $(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \cos^2 \alpha - 1$;
 - 4) $1 - \sin^2 \alpha (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)$;
 - 5) $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha}$;
 - 6) $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$.
5. Спростіть вираз:
 - 1) $1 - \sin^2 \alpha \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha$;
 - 2) $\sin \alpha \cos \alpha \operatorname{ctg} \alpha$;
 - 3) $(\cos x - 1)(2 + 2\cos x)$;
 - 4) $2 - \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.
6. Спростіть вираз:
 - 1) $(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2 + (1 - \operatorname{tg} \alpha)^2$;
 - 2) $\sin^4 \alpha + 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha$;
 - 3) $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$;
 - 4) $\operatorname{ctg} x + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$.
12. Побудуйте графік функції $y = \frac{1}{\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x}$.

Рівень В

1. Обчисліть значення тригонометричних функцій кута α , якщо:
 - 1) $\sin \alpha = -\frac{2}{7}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;
 - 2) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{3}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.
2. Обчисліть значення тригонометричних функцій кута α , якщо:
 - 2) $\operatorname{ctg} \alpha = -3\frac{3}{7}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;
 - 6) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.
3. Обчисліть $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$, якщо $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{2}{5}$.
4. Спростіть вираз:
 - 1) $\sin^4 \alpha + 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha$;
 - 2) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$;
 - 3) $\cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha$;
 - 4) $\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$.
5. Спростіть вираз:
 - 1) $\cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$;
 - 2) $\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha$;
 - 3) $\cos(-\alpha) + \cos \alpha \operatorname{tg}^2(-\alpha)$;
 - 4) $\frac{1 + \sin(-\beta)}{\cos(-\beta)} - \operatorname{tg}(-\beta)$.
6. Обчисліть $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$, якщо $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{2}{5}$.

7. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:

1) $1 + \sqrt{\sin^2 \alpha} + 2 \cos^2 \alpha$;

2) $\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (2 - \sin^2 \alpha)$;

3) $\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{\cos \alpha}$;

4) $\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \operatorname{tg}^2 \alpha$.

8. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} + \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$, якщо $3\pi < \alpha < 4\pi$;

2) $\sqrt{\cos^2 \beta (1 + \operatorname{tg} \beta) + \sin^2 \beta (1 + \operatorname{ctg} \beta)}$, якщо $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

9. Знайдіть найбільше і найменше значення функції:

1) $y = 3 \sin^2 x + 2 \cos^2 x$;

2) $y = \cos^2 x - 2 \sin^2 x$.

10. Знайдіть кут x , якщо $0 < x < \frac{\pi}{2}$ і $8 \sin^2 x - 2 \cos x = 5$.

11. Спростіть вираз:

1) $\frac{2 \sin^2 \alpha - 1}{\sin \alpha - \cos \alpha}$;

2) $(a \sin \alpha + b \cos \alpha)^2 + (a \cos \alpha - b \sin \alpha)^2$.

12. Побудуйте графік функції $y = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x}$.

Рівень С

1. Знайдіть значення виразу $\frac{3 \sin^2 \alpha + 12 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha - 2 \cos^2 \alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 2$.

2. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} + \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$, якщо $3\pi < \alpha < 4\pi$;

2) $\sqrt{\cos^2 \beta (1 + \operatorname{tg} \beta) + \sin^2 \beta (1 + \operatorname{ctg} \beta)}$, якщо $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

3. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}}$, якщо $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

2) $\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} + \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$, якщо $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

4. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = a \sin^2 x + b \cos^2 x$.

5. Знайдіть кут x , якщо $0 < x < \frac{\pi}{2}$ і $\sin^3 x (1 - \operatorname{ctg} x) - \cos^3 x (1 - \operatorname{tg} x) = 0$.

6. Знайдіть значення виразу $\sin^2 x - \sin^4 x + \cos^4 x$, якщо відомо, що $\cos x + \sin x \operatorname{ctg} x = 0,4$.

7. *Творче завдання.* Створіть електронний тренажер для відпрацювання навичок використання найпростіших тригонометричних тотожностей.

Рефлексія

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
.....
.....
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
.....
.....
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
.....
.....
- 4) Найскладнішим для мене було
.....
.....
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
.....
.....
- 6) Найбільше мені сподобалося
.....
.....

Можливі теми проєктів

- 1.** Алгоритм використання основних співвідношень між тригонометричними функціями для спрощення і перетворення виразів.
- 2.** Використання тригонометричних тотожностей у задачах фізики й техніки.
- 3.** Аналіз основних помилок при розв'язуванні задач на спрощення тригонометричних виразів.
- 4.** Створення електронного тренажера для спрощення тригонометричних виразів.
- 5.** Використання основних співвідношень між тригонометричними функціями при розв'язуванні вправ на оцінювання значення виразу.



