

11

Тема 2. Співвідношення між тригонометричними функціями

Урок 3. Урок–практикум. Спрощення виразів та доведення тотожностей із використанням формул залежностей між тригонометричними функціями одного кута

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) удосконалили навички спрощувати та перетворювати тригонометричні вирази з використанням основної тригонометричної тотожності;
- 2) вивчили основні способи доведення тотожностей;
- 3) навчилися доводити тотожності, використовуючи основні співвідношення між тригонометричними функціями;
- 4) навчилися використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Обчисліть: $8 + \sin^2 8\pi + \cos^2 8\pi$.
2. Спростіть вираз $\operatorname{tg}^2 9\alpha - \frac{1}{\cos^2 9\alpha}$.
3. Відомо, що $\sin \alpha = -0,6$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Обчисліть: $\cos \alpha$.
4. Чому дорівнює $\cos \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 3$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$?
5. Спростіть вираз $\cos^2 \beta - \cos^2 \beta \cdot \sin^2 \beta$.

Задача 2. Олімпіадна задача. Нехай α, β, γ — такі гострі кути, що $\cos \alpha = \operatorname{tg} \beta$,

$$\cos \beta = \operatorname{tg} \gamma, \cos \gamma = \operatorname{tg} \alpha. \text{ Доведіть, що } \sin \alpha = \sin \beta = \sin \gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Спростіть вираз:

1) $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$;

2) $\sin^4 3\alpha + 2\sin^2 3\alpha \cos^2 3\alpha + \cos^4 3\alpha$.

2. Спростіть вираз:

1) $\sin^4 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^4 \alpha$;

2) $(\operatorname{tg} \beta + \operatorname{ctg} \beta)^2 - (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{ctg} \beta)^2$;

3) $(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2 + (1 - \operatorname{tg} \alpha)^2$;

4) $(1 + \operatorname{ctg} \beta)^2 + (1 - \operatorname{ctg} \beta)^2$.

3. Спростіть вираз:

1) $\cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$;

2) $\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha$;

3) $\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha$;

4) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha$.

4. Доведіть тотожність:

1) $(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha) = \sin^2 \alpha$;

2) $(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha) = \cos^2 \alpha$;

3) $\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \operatorname{ctg}^2 \alpha$;

4) $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \sin^2 \alpha = 1$.

5. Доведіть тотожність:

1) $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg} \alpha$;

2) $(1 - \cos^2 \alpha)(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \operatorname{tg}^2 \alpha$.

6. Доведіть тотожність:

1) $\left(\frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\cos \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha}\right)^2 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$;

2) $(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)(1 - \sin^2 \alpha) = \operatorname{ctg}^2 \alpha$.

Рівень В

1. Спростіть вираз:

1) $\frac{\sin y}{1 + \cos y} + \operatorname{ctg} y - \operatorname{tg} \frac{y}{2} \operatorname{ctg} 0,5y$;

2) $\sin^2 x \cos^2 y + \sin^2 y \cos^2 x + \cos^2 x \cos^2 y + \sin^2 x \sin^2 y$;

3) $\frac{\operatorname{ctg}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x}$;

4) $\frac{(\operatorname{tg}^2 \gamma + \sin^2 \gamma + 1)(\cos^2 \gamma - \operatorname{ctg}^2 \gamma + 1)}{(\operatorname{ctg}^2 \gamma + \cos^2 \gamma + 1)(\operatorname{tg}^2 \gamma + \sin^2 \gamma - 1)}$.

2. Спростіть вираз:

1) $\operatorname{ctg}^6 \beta - \frac{\cos^2 \beta - \operatorname{ctg}^2 \beta}{\sin^2 \beta - \operatorname{tg}^2 \beta}$;

2) $\frac{1}{(\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha + \cos \alpha)^2} + \sin^2 \alpha$;

3) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha - \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$;

4) $\frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

3. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} + \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$, якщо $3\pi < \alpha < 4\pi$;

2) $\sqrt{\cos^2 \beta (1 + \operatorname{tg} \beta) + \sin^2 \beta (1 + \operatorname{ctg} \beta)}$, якщо $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

4. Доведіть тотожність:

1) $\frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha$;

2) $\frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} - \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1} = \sin \alpha + \cos \alpha$;

3) $\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$;

4) $\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha - \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha} = \operatorname{tg}^4 \alpha$.

5. Доведіть тотожність:

1) $\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \frac{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$;

2) $\frac{1 - \operatorname{ctg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} \gamma} = -\operatorname{ctg} \gamma$;

3) $\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \cos^2 \alpha$;

4) $\frac{1 + \operatorname{tg}^4 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$.

6. Доведіть тотожність:

1) $\frac{\cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha}{1 + \sin \alpha \cos \alpha} = \cos \alpha - \sin \alpha$;

2) $\cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.

7. Доведіть тотожність:

1) $\frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$;

2) $1 + \frac{\cos \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}$;

3) $1 + (\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha) \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha$;

4) $\frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha \cos \alpha} = 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha$.

9. Доведіть тотожність:

1) $\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$;

2) $\frac{1 + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}}{1 + \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \operatorname{ctg}^2 \alpha$.

10. Спростіть вираз:

1) $\sin^2 \alpha \cdot (1 + \sin^{-1} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) \cdot (1 - \sin^{-1} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)$;

2) $2(\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) - (\sin^8 \alpha + \cos^8 \alpha)$.

11. Доведіть тотожність:

1) $\frac{1 - 2 \sin^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1} = 1$;

2) $\frac{1}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}$;

3) $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$;

4) $\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha$.

12. Доведіть тотожність:

1) $\sin^3 \alpha \cdot (1 + \operatorname{ctg} \alpha) + \cos^3 \alpha \cdot (1 + \operatorname{tg} \alpha) = \sin \alpha + \cos \alpha$;

2) $\frac{2(1 + \operatorname{tg} \alpha) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 1}{(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2} - \frac{2(1 + \operatorname{ctg} \alpha) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 1}{(1 + \operatorname{ctg} \alpha)^2} = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.

Рівень С

1. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{2 - 2\cos^2 \beta} + \sqrt{2\sin^2 \beta - 2\sqrt{2}\sin \beta + 1}$, якщо $\frac{3\pi}{4} \leq \beta \leq \pi$;

2) $\frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}}{\operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \alpha}$, якщо $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

2. Доведіть тотожність:

1) $\frac{(\operatorname{tg} x + \cos^{-1} x)(\operatorname{ctg} x - \cos x)}{(\operatorname{ctg} x + \cos x)(\operatorname{tg} x - \cos^{-1} x)} = \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg}^2 2x - 1} \cdot \frac{\operatorname{ctg}^2 2x - 1}{\operatorname{ctg} 2x}$;

2) $\sin \gamma \cdot \left(\frac{\sqrt{\operatorname{tg} \gamma} + \sqrt{\operatorname{ctg} \gamma}}{\sin \gamma + \cos \gamma} \right)^2 = \sec \gamma$;

3) $\frac{2\sin 3\alpha \cos 3\alpha + 1}{2\cos^2 3\alpha - 1} = \frac{\cos 3\alpha + \sin 3\alpha}{\cos 3\alpha - \sin 3\alpha}$;

4) $\sin x(1 + \operatorname{ctg} x + \sin^{-1} x)(1 - \sin^{-1} x + \operatorname{ctg} x) = 2\cos x$.

3. Доведіть тотожність:

1) $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha$;

2) $\frac{\sin \alpha - \cos \beta}{\sin \beta + \cos \alpha} = \frac{\sin \beta - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \beta}$;

3) $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$;

4) $\frac{\operatorname{ctg} \alpha \cos \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha + \cos \alpha} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha - \cos \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha \cos \alpha}$.

4. Доведіть тотожність:

1) $\frac{1 - \cos^4 \beta - \sin^4 \beta}{\operatorname{tg}^2 \beta} = 2\cos^4 \beta$;

2) $2(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)^2 - (\sin^8 \alpha + \cos^8 \alpha) = 1$.

5. Спростіть вираз:

1) $\operatorname{ctg} \alpha - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$, якщо $\pi < \alpha < 2\pi$;

2) $\sqrt{4\cos^2 \alpha + 4\cos \alpha + 1} - \sqrt{4 - 4\sin^2 \alpha}$, якщо $\frac{2\pi}{3} \leq \alpha \leq \pi$.

6. Спростіть вираз:

1) $\frac{\cos^4 \beta - \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta + \sin^2 \beta \cdot \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta}$;

2) $\frac{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 - (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)^2}{\frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} - \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha}$.

7. Творче завдання. Порівняйте способи спрощення складних тригонометричних виразів засобами популярних сервісів, які використовують штучний інтелект.

Рефлексія

- | | | | |
|-----------|---|------------------------|----|
| 1. | Я знаю основні тригонометричні тотожності. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я вмію спрощувати та перетворювати тригонометричні вирази, використовуючи основні тригонометричні тотожності. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я знаю основні способи доведення тотожностей. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я вмію доводити тотожності, використовуючи основні співвідношення між тригонометричними функціями. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

1. Використання тригонометричних перетворень при обробці цифрових сигналів.
2. Спрощення тригонометричних виразів у задачах астрономії.
3. Основні тригонометричні тотожності в задачах ЗНО/НМТ.
4. Перетворення тригонометричних виразів в задачах електроніки.
5. Тригонометричні перетворення в аналізі біологічних ритмів.







