

11

Тема 2. Співвідношення між тригонометричними функціями

Урок 3. Урок–практикум. Спрощення виразів та доведення тотожностей із використанням формул залежностей між тригонометричними функціями одного кута

Тип уроку: урок формування умінь і навичок.

План уроку

1. Спрощення та перетворення тригонометричних виразів.
2. Доведення тотожностей.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

оцінює достовірність і доцільність використання даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 1.2.2–1 П];

аналізує спільні та відмінні риси різних моделей і шляхів розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1–1 П];

добирає доцільні математичні поняття, факти і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого. Завдання можна розв'язувати усно.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.

- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.
- 6) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.
- 7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.
- 9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівень В або рівень С.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Чому замість обчислення складних тригонометричних виразів краще спростити їх за допомогою тригонометричних формул?
- 2) Чи допомагають формули тригонометрії інженерам при проведенні розрахунків?
- 3) Що спільного між математиком, який розв'язує задачу і детективом, який проводить розслідування?
- 4) Чи використовують астрономи тригонометричні тотожності при проведенні своїх досліджень?
- 5) Чи можна за допомогою перетворення тригонометричного виразу зменшити похибку вимірювання?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Обчисліть: $8 + \sin^2 8\pi + \cos^2 8\pi$.
Відповідь. 9.
2. Спростіть вираз $\operatorname{tg}^2 9\alpha - \frac{1}{\cos^2 9\alpha}$.
Відповідь. -1.
3. Відомо, що $\sin \alpha = -0,6$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Обчисліть: $\cos \alpha$.
Відповідь. -0,8.

4. Чому дорівнює $\cos \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 3$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$?

Відповідь. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

5. Спростіть вираз $\cos^2 \beta - \cos^2 \beta \cdot \sin^2 \beta$.

Відповідь. $\cos^4 \beta$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. У лабораторії досліджують потужність сигналу від датчика, який вимірює коливання вібраційної платформи. Через конструктивні особливості датчика він передає оброблене значення інтенсивності сигналу, яку можна обчислити за формулою $I(t) = \cos^2 t - \sin t$, де t – час (у секундах), який минув після початку дослідження, $I(t)$ – потужність сигналу (у ватах). Якого максимального значення може набувати потужність сигналу отриманого від датчика?

Задача 2. Олімпіадна задача. Нехай α, β, γ — такі гострі кути, що $\cos \alpha = \operatorname{tg} \beta$,

$\cos \beta = \operatorname{tg} \gamma, \cos \gamma = \operatorname{tg} \alpha$. Доведіть, що $\sin \alpha = \sin \beta = \sin \gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

III. Спрощення та перетворення тригонометричних виразів

Нагадаємо поради учню/учениці при перетворенні найпростіших тригонометричних виразів.

1. При виконанні вправ замість α можуть бути інші вирази, але це не означає, що не можна використовувати вивчені формули.

Правильними будуть також рівності:

$$\cos^2(5\beta - 2) + \sin^2(5\beta - 2) = 1 \text{ або } \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}} \text{ тощо.}$$

2. Пам'ятайте, що $1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$, $1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$, $\sin^2 \alpha - 1 = -\cos^2 \alpha$, $\cos^2 \alpha - 1 = -\sin^2 \alpha$.
3. Іноді замість 1 записують $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$. Цей вираз називається тригонометричною одиницею.
4. Якщо вираз містить тангенси або котангенси, то спробуйте подати їх, за означенням, у вигляді дробових виразів: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.
5. Не забувайте про формули скороченого множення.

Ілюстративні приклади

6. Обчисліть $\frac{\sin \alpha}{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 2$.

Розв'язання.
$$\frac{\sin \alpha}{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha}}{\frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + 1} = \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha}}{\operatorname{tg}^3 \alpha + 1} =$$
$$= \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot (\operatorname{tg}^2 \alpha + 1)}{\operatorname{tg}^3 \alpha + 1} = \frac{2 \cdot (2^2 + 1)}{2^3 + 1} = \frac{10}{9}.$$

Відповідь. $\frac{10}{9}$.

7. Знайдіть $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$ і $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$, якщо $\sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{1}{2}$.

Розв'язання. $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4}$, звідки $\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{3}{8}$.

$$\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha) = -\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{3}{8}\right) = -\frac{11}{16}.$$

$$1 = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 = \sin^4 \alpha + 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \cos^4 \alpha.$$

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2(\sin \alpha \cos \alpha)^2 = 1 - 2 \cdot \frac{9}{64} = \frac{23}{32}.$$

Відповідь. $-\frac{11}{16}, \frac{23}{32}$.

8. Спростіть вираз $\frac{(\operatorname{tg} \alpha + \cos^{-1} \alpha)(\cos \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)}{(\cos \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)(\operatorname{tg} \alpha - \cos^{-1} \alpha)}$.

Розв'язання.
$$\frac{(\operatorname{tg} \alpha + \cos^{-1} \alpha)(\cos \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)}{(\cos \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)(\operatorname{tg} \alpha - \cos^{-1} \alpha)} = \frac{\left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha}\right)\left(\cos \alpha - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right)}{\left(\cos \alpha + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right)\left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{1}{\cos \alpha}\right)} =$$
$$= \frac{\frac{\sin \alpha + 1}{\cos \alpha} \cdot \frac{(\sin \alpha - 1) \cos \alpha}{\cos \alpha (\sin \alpha + 1)} \cdot \frac{\sin \alpha - 1}{\cos \alpha}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = 1.$$

Відповідь. 1.

9. Спростіть вираз $\frac{(\sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha + 1)(\cos^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1)}{(\cos^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1)(\sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha - 1)}$.

Розв'язання.
$$\frac{(\sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha + 1)(\cos^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1)}{(\cos^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1)(\sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha - 1)} =$$
$$= \frac{\left(\sin^2 \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1\right)\left(\cos^2 \alpha - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + 1\right)}{\left(\cos^2 \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + 1\right)\left(\sin^2 \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - 1\right)} =$$

$$= \frac{\frac{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}} = 1.$$

Відповідь. 1.

- 10.** Спростіть вираз $\sqrt{\sin^2 \alpha (1 - \operatorname{ctg} \alpha) + \cos^2 \alpha (1 - \operatorname{tg} \alpha)}$, якщо $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Розв'язання. $\sqrt{\sin^2 \alpha (1 - \operatorname{ctg} \alpha) + \cos^2 \alpha (1 - \operatorname{tg} \alpha)} =$
 $= \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} =$
 $= \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha - \cos \alpha \sin \alpha} = \sqrt{\sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}$
 $= \sqrt{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} = |\sin \alpha - \cos \alpha|.$

Оскільки $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, то $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$, $-\cos \alpha < 0$ і $\sin \alpha - \cos \alpha < 0$.

Отже, $|\sin \alpha - \cos \alpha| = \cos \alpha - \sin \alpha$.

Відповідь. $\cos \alpha - \sin \alpha$.

IV. Доведення тотожностей

Що потрібно виконувати, щоб довести тотожність?

1. Перетворити праву частину рівності так, щоб показати що вона дорівнює лівій.
2. Перетворити ліву частину рівності так, щоб показати що вона дорівнює правій.
3. Перетворювати праву і ліву частини рівності й показати, що вони зводяться до рівних виразів.
4. Знайти різницю лівої і правої частин і показати, що вона дорівнює 0.
5. Розглянути частку лівої і правої частин і показати, що вона дорівнює 1, але потрібно перевіряти ОДЗ змінних виразу, на який ми ділимо.

Ілюстративні приклади

- 11.** Доведіть тотожність $\frac{\sqrt{3} - 2 \sin \alpha}{2 \cos \alpha - 1} = \frac{1 + 2 \cos \alpha}{2 \sin \alpha + \sqrt{3}}$.

Доведення. Розглянемо різницю лівої та правої частин даної рівності:

$$\frac{\sqrt{3} - 2 \sin \alpha}{2 \cos \alpha - 1} - \frac{1 + 2 \cos \alpha}{2 \sin \alpha + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} - 2 \sin \alpha)(2 \sin \alpha + \sqrt{3}) - (2 \cos \alpha - 1)(1 + 2 \cos \alpha)}{(2 \cos \alpha - 1)(2 \sin \alpha + \sqrt{3})} =$$

$$= \frac{3 - 4 \sin^2 \alpha - (4 \cos^2 \alpha - 1)}{(2 \cos \alpha - 1)(2 \sin \alpha + \sqrt{3})} = \frac{3 - 4 \sin^2 \alpha - 4 \cos^2 \alpha + 1}{(2 \cos \alpha - 1)(2 \sin \alpha + \sqrt{3})} = \frac{4 - 4(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{(2 \cos \alpha - 1)(2 \sin \alpha + \sqrt{3})} = 0.$$

Отже, дана рівність є тотожністю.

- 12.** Доведіть тотожність $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$.

Доведення. Перетворимо ліву частину рівності:

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cdot 1 = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha,$$

що й треба було довести.

13. Доведіть тотожність $\frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{ctg} 3\beta}{\operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{tg} 3\beta} = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 3\beta}.$

Доведення. Перетворимо ліву частину рівності:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{ctg} 3\beta}{\operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{tg} 3\beta} &= \frac{\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} + \frac{\cos 3\beta}{\sin 3\beta}}{\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} + \frac{\sin 3\beta}{\cos 3\beta}} = \frac{\frac{\sin 2\alpha \sin 3\beta + \cos 2\alpha \cos 3\beta}{\cos 2\alpha \sin 3\beta}}{\frac{\cos 2\alpha \cos 3\beta + \sin 2\alpha \sin 3\beta}{\sin 2\alpha \cos 3\beta}} = \\ &= \frac{\sin 2\alpha \sin 3\beta + \cos 2\alpha \cos 3\beta}{\cos 2\alpha \sin 3\beta} \cdot \frac{\sin 2\alpha \cos 3\beta}{\cos 2\alpha \cos 3\beta + \sin 2\alpha \sin 3\beta} = \frac{\sin 2\alpha \cos 3\beta}{\cos 2\alpha \sin 3\beta} = \\ &= \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos 3\beta}{\sin 3\beta} = \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{ctg} 3\beta = \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 3\beta} = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 3\beta}, \text{ що й треба було довести.} \end{aligned}$$

14. Доведіть тотожність $\frac{\operatorname{tg} \alpha - \cos^{-1} \alpha}{\cos \alpha - \operatorname{ctg} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \cos^{-1} \alpha.$

Доведення. Перетворимо ліву частину рівності:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg} \alpha - \cos^{-1} \alpha}{\cos \alpha - \operatorname{ctg} \alpha} &= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{1}{\cos \alpha}}{\cos \alpha - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{\frac{\sin \alpha - 1}{\cos \alpha}}{\frac{\cos \alpha(\sin \alpha - 1)}{\sin \alpha}} = \\ &= \frac{\sin \alpha - 1}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha(\sin \alpha - 1)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \cos^{-1} \alpha, \text{ що й треба було} \\ &\text{ довести.} \end{aligned}$$

15. Доведіть тотожність $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1.$

Доведення. Перетворимо ліву частину рівності:

$$\begin{aligned} \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha &= (\sin^2 \alpha)^3 + (\cos^2 \alpha)^3 + 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \\ &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) + 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \\ &= ((\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha) + 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \\ &= \left((\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \right) - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \\ &= (1 - 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha) + 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1, \text{ що й треба було довести.} \end{aligned}$$

V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. У лабораторії досліджують потужність сигналу від датчика, який вимірює коливання вібраційної платформи. Через конструктивні особливості датчика він передає оброблене значення інтенсивності сигналу, яку можна обчислити за формулою $I(t) = \cos^2 t - \sin t$, де t – час (у секундах), який минув після початку дослідження, $I(t)$ – потужність сигналу (у ватах). Якого максимального значення може набувати потужність сигналу отриманого від датчика?

Розв'язання. $I(t) = \cos^2 t - \sin t = 1 - \sin^2 t - \sin t$.

Знайдемо найбільше значення функції $f(x) = -x^2 - x + 1$, де $x \in [-1; 1]$.

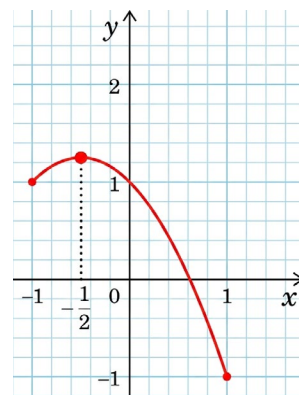
Побудуємо графік цієї функції (див. рисунок).

Отже, найбільше значення функції досягається в точці $x = -\frac{1}{2}$, у вершині параболи.

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 = 1\frac{1}{4}.$$

Отже, найбільше значення потужності сигналу становитиме 1,25 Вт.

Відповідь. 1,25 Вт.



Задача 2. Олімпіадна задача. Нехай α, β, γ — такі гострі кути, що $\cos \alpha = \operatorname{tg} \beta$,

$$\cos \beta = \operatorname{tg} \gamma, \cos \gamma = \operatorname{tg} \alpha. \text{ Доведіть, що } \sin \alpha = \sin \beta = \sin \gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Доведення. } \cos^2 \alpha &= 1 - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \beta = \frac{1}{\cos^2 \beta} - 1 = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \gamma} - 1 = \frac{\cos^2 \gamma}{1 - \cos^2 \gamma} - 1 = \frac{2 \cos^2 \gamma - 1}{1 - \cos^2 \gamma} = \\ &= \frac{2 \operatorname{tg}^2 \alpha - 1}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\frac{2 \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} - 1}{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{3 \sin^2 \alpha - 1}{1 - 2 \sin^2 \alpha}. \end{aligned}$$

$$\text{Таким чином, } 1 - \sin^2 \alpha = \frac{3 \sin^2 \alpha - 1}{1 - 2 \sin^2 \alpha}.$$

$$\text{Нехай } \sin \alpha = t, \text{ тоді } 1 - t^2 = \frac{3t^2 - 1}{1 - 2t^2}, 1 - 3t^2 + 2t^4 = 3t^2 - 1, 2t^4 - 6t^2 + 2 = 0, t^4 - 3t^2 + 1 = 0,$$

$$t^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ або } t^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \text{ що неможливо, оскільки } -1 \leq t \leq 1.$$

$$\text{Маємо } \sin^2 \alpha = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^2.$$

$$\text{Оскільки, за умовою, кут } \alpha \text{ — гострий, то } \sin \alpha > 0, \text{ тобто } \sin \alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

$$\text{Аналогічно доводимо, що } \sin \beta = \sin \gamma = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Спростіть вираз:

1) $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$;

2) $\sin^4 3\alpha + 2\sin^2 3\alpha \cos^2 3\alpha + \cos^4 3\alpha$.

2. Спростіть вираз:

1) $\sin^4 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^4 \alpha$;

2) $(\operatorname{tg} \beta + \operatorname{ctg} \beta)^2 - (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{ctg} \beta)^2$;

3) $(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2 + (1 - \operatorname{tg} \alpha)^2$;

4) $(1 + \operatorname{ctg} \beta)^2 + (1 - \operatorname{ctg} \beta)^2$.

3. Спростіть вираз:

1) $\cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$;

2) $\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha$;

3) $\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha$;

4) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha$.

4. Доведіть тотожність:

1) $(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha) = \sin^2 \alpha$;

2) $(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha) = \cos^2 \alpha$;

3) $\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \operatorname{ctg}^2 \alpha$;

4) $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \sin^2 \alpha = 1$.

5. Доведіть тотожність:

1) $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg} \alpha$;

2) $(1 - \cos^2 \alpha)(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \operatorname{tg}^2 \alpha$.

6. Доведіть тотожність:

1) $\left(\frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\cos \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha}\right)^2 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$;

2) $(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)(1 - \sin^2 \alpha) = \operatorname{ctg}^2 \alpha$.

Рівень В

1. Спростіть вираз:

1) $\frac{\sin y}{1 + \cos y} + \operatorname{ctg} y - \operatorname{tg} \frac{y}{2} \operatorname{ctg} 0,5y$;

2) $\sin^2 x \cos^2 y + \sin^2 y \cos^2 x + \cos^2 x \cos^2 y + \sin^2 x \sin^2 y$;

3) $\frac{\operatorname{ctg}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x}$;

4) $\frac{(\operatorname{tg}^2 \gamma + \sin^2 \gamma + 1)(\cos^2 \gamma - \operatorname{ctg}^2 \gamma + 1)}{(\operatorname{ctg}^2 \gamma + \cos^2 \gamma + 1)(\operatorname{tg}^2 \gamma + \sin^2 \gamma - 1)}$.

2. Спростіть вираз:

1) $\operatorname{ctg}^6 \beta - \frac{\cos^2 \beta - \operatorname{ctg}^2 \beta}{\sin^2 \beta - \operatorname{tg}^2 \beta}$;

2) $\frac{1}{(\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha + \cos \alpha)^2} + \sin^2 \alpha$;

3) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha - \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$;

4) $\frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

3. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} + \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$, якщо $3\pi < \alpha < 4\pi$;

2) $\sqrt{\cos^2 \beta(1 + \operatorname{tg} \beta) + \sin^2 \beta(1 + \operatorname{ctg} \beta)}$, якщо $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

4. Доведіть тотожність:

1) $\frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha;$

2) $\frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} - \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1} = \sin \alpha + \cos \alpha;$

3) $\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha;$

4) $\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha - \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha} = \operatorname{tg}^4 \alpha.$

5. Доведіть тотожність:

1) $\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \frac{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha;$

2) $\frac{1 - \operatorname{ctg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} \gamma} = -\operatorname{ctg} \gamma;$

3) $\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \cos^2 \alpha;$

4) $\frac{1 + \operatorname{tg}^4 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha.$

6. Доведіть тотожність:

1) $\frac{\cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha}{1 + \sin \alpha \cos \alpha} = \cos \alpha - \sin \alpha;$

2) $\cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$

7. Доведіть тотожність:

1) $\frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha;$

2) $1 + \frac{\cos \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha};$

3) $1 + (\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha) \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha;$

4) $\frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha \cos \alpha} = 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha.$

9. Доведіть тотожність:

1) $\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha;$

2) $\frac{1 + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}}{1 + \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \operatorname{ctg}^2 \alpha.$

10. Спростіть вираз:

1) $\sin^2 \alpha \cdot (1 + \sin^{-1} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) \cdot (1 - \sin^{-1} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha);$

2) $2(\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) - (\sin^8 \alpha + \cos 8\alpha).$

11. Доведіть тотожність:

1) $\frac{1 - 2 \sin^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1} = 1;$

2) $\frac{1}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1};$

3) $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha};$

4) $\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha.$

12. Доведіть тотожність:

1) $\sin^3 \alpha \cdot (1 + \operatorname{ctg} \alpha) + \cos^3 \alpha \cdot (1 + \operatorname{tg} \alpha) = \sin \alpha + \cos \alpha;$

2) $\frac{2(1 + \operatorname{tg} \alpha) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 1}{(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2} - \frac{2(1 + \operatorname{ctg} \alpha) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 1}{(1 + \operatorname{ctg} \alpha)^2} = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$

Рівень С

1. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{2 - 2\cos^2 \beta} + \sqrt{2\sin^2 \beta - 2\sqrt{2}\sin \beta + 1}$, якщо $\frac{3\pi}{4} \leq \beta \leq \pi$;

2) $\frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}}{\operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \alpha}$, якщо $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

2. Доведіть тотожність:

1) $\frac{(\operatorname{tg} x + \cos^{-1} x)(\operatorname{ctg} x - \cos x)}{(\operatorname{ctg} x + \cos x)(\operatorname{tg} x - \cos^{-1} x)} = \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg}^2 2x - 1} \cdot \frac{\operatorname{ctg}^2 2x - 1}{\operatorname{ctg} 2x}$;

2) $\sin \gamma \cdot \left(\frac{\sqrt{\operatorname{tg} \gamma} + \sqrt{\operatorname{ctg} \gamma}}{\sin \gamma + \cos \gamma} \right)^2 = \sec \gamma$;

3) $\frac{2\sin 3\alpha \cos 3\alpha + 1}{2\cos^2 3\alpha - 1} = \frac{\cos 3\alpha + \sin 3\alpha}{\cos 3\alpha - \sin 3\alpha}$;

4) $\sin x(1 + \operatorname{ctg} x + \sin^{-1} x)(1 - \sin^{-1} x + \operatorname{ctg} x) = 2\cos x$.

3. Доведіть тотожність:

1) $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha$;

2) $\frac{\sin \alpha - \cos \beta}{\sin \beta + \cos \alpha} = \frac{\sin \beta - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \beta}$;

3) $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$;

4) $\frac{\operatorname{ctg} \alpha \cos \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha + \cos \alpha} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha - \cos \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha \cos \alpha}$.

4. Доведіть тотожність:

1) $\frac{1 - \cos^4 \beta - \sin^4 \beta}{\operatorname{tg}^2 \beta} = 2\cos^4 \beta$;

2) $2(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)^2 - (\sin^8 \alpha + \cos^8 \alpha) = 1$.

5. Спростіть вираз:

1) $\operatorname{ctg} \alpha - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$, якщо $\pi < \alpha < 2\pi$;

2) $\sqrt{4\cos^2 \alpha + 4\cos \alpha + 1} - \sqrt{4 - 4\sin^2 \alpha}$, якщо $\frac{2\pi}{3} \leq \alpha \leq \pi$.

6. Спростіть вираз:

1) $\frac{\cos^4 \beta - \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta + \sin^2 \beta \cdot \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta}$;

2) $\frac{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 - (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)^2}{\frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} - \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha}$.

7. Творче завдання. Порівняйте способи спрощення складних тригонометричних виразів засобами популярних сервісів, які використовують штучний інтелект.

VII. Рефлексія (1–2 хв)

1. Я знаю основні тригонометричні тотожності.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

- | | | | | |
|-----------|---|-----|------------------------|----|
| 2. | Я вмію спрощувати та перетворювати тригонометричні вирази, використовуючи основні тригонометричні тотожності. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я знаю основні способи доведення тотожностей. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я вмію доводити тотожності, використовуючи основні співвідношення між тригонометричними функціями. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

- 1.** Використання тригонометричних перетворень при обробці цифрових сигналів.
- 2.** Спрощення тригонометричних виразів у задачах астрономії.
- 3.** Основні тригонометричні тотожності в задачах ЗНО/НМТ.
- 4.** Перетворення тригонометричних виразів в задачах електроніки.
- 5.** Тригонометричні перетворення в аналізі біологічних ритмів.