

Тема 2.

Співвідношення між тригонометричними функціями

Урок 4. Теореми (формули) додавання

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви вивчите:

- 1) формули косинуса суми та різниці кутів;
- 2) формули синуса суми та різниці кутів;
- 3) формули тангенса суми та різниці кутів;
- 4) формули котангенса суми та різниці кутів.

II. Повторення

1. Подайте $\cos 126^\circ$ як косинус гострого кута.
2. Знайдіть відстань між точками $A(1; -3)$ та $B(-2; 5)$.
3. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника ABC , якщо $BC = 9$ см і $\angle A = 60^\circ$.
4. Знайдіть значення виразу $4\sin(-30^\circ) - 3\operatorname{ctg}(-45^\circ) + 5\cos(-60^\circ)$.
5. Кутом якої координатної чверті є кут α , якщо $\cos \alpha < 0$ і $\sin \alpha \cos \alpha < 0$?

III. Косинус суми та різниці двох кутів

Формула косинуса суми кутів: $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$.

Доведення. Розглянемо одиничне коло, а на ньому точки A_α , $A_{\alpha+\beta}$ та $A_{-\beta}$ (див. рисунок).

Їм відповідають кути α , $\alpha + \beta$ та $-\beta$.

Оскільки трикутники $A_{-\beta}OA_\alpha$ та $A_{\alpha+\beta}OA_0$ — рівні, за першою ознакою рівності трикутників, то $A_\alpha A_{-\beta} = A_0 A_{\alpha+\beta}$.

Підставимо в останню рівність довжини цих відрізків, виражених координатами їхніх кінцевих точок. Для цього використаємо формулу відстані між двома точками.

Оскільки точка A_α має координати $(\cos \alpha; \sin \alpha)$, точка $A_{-\beta}$ — координати $(\cos \beta; -\sin \beta)$, а точка $A_{\alpha+\beta}$ — координати $(\cos(\alpha + \beta); \sin(\alpha + \beta))$, то маємо:

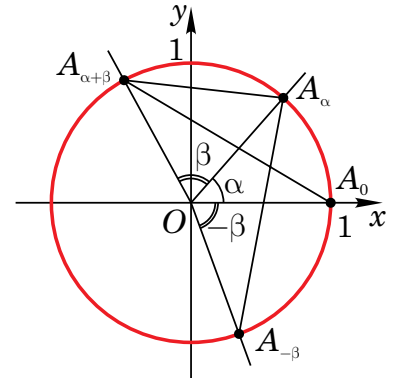
$$\sqrt{(\cos(\alpha + \beta) - \cos \beta)^2 + (\sin(\alpha + \beta) + \sin \beta)^2} = \sqrt{(\cos \alpha - 1)^2 + (\sin \alpha)^2},$$

$$\cos^2(\alpha + \beta) - 2 \cos(\alpha + \beta) \cos \beta + \cos^2 \beta + \sin^2(\alpha + \beta) + 2 \sin(\alpha + \beta) \sin \beta + \sin^2 \beta =$$

$$= \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta,$$

$$-2 \cos(\alpha + \beta) \cos \beta + 2 \sin(\alpha + \beta) \sin \beta = -2 \cos \alpha \cos \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta.$$

Звідки $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$.



Формула косинуса різниці кутів: $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$.

Доведення. Застосуємо формулу косинуса суми для кутів α і $-\beta$:

$\cos(\alpha + (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$, що й треба було довести.

Примітка. Можна запропонувати спосіб доведення формули косинуса різниці двох кутів через скалярний добуток векторів.

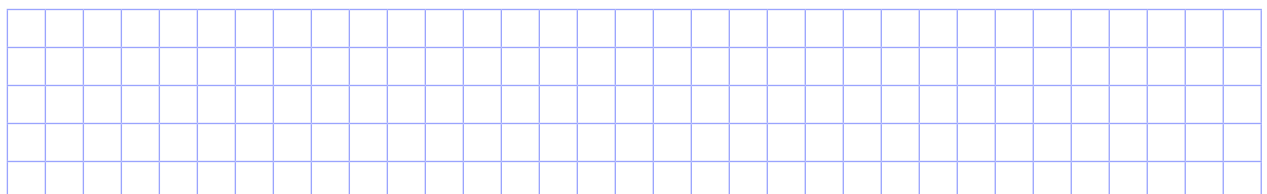
Приклад 1. Обчисліть $\cos 75^\circ$.

Розв'язання. $\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ =$

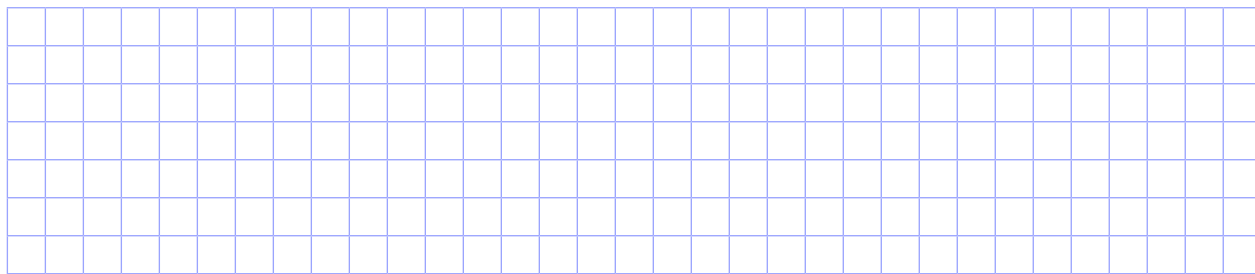
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Відповідь. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$

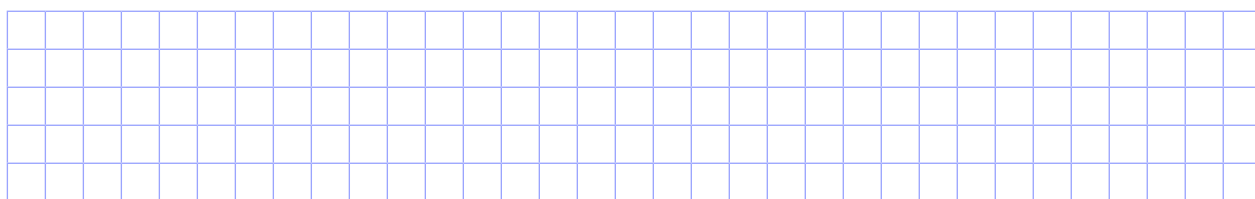
Приклад 1. Обчисліть $\cos 15^\circ$.



Приклад 5. Спростіть вираз $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)}$.



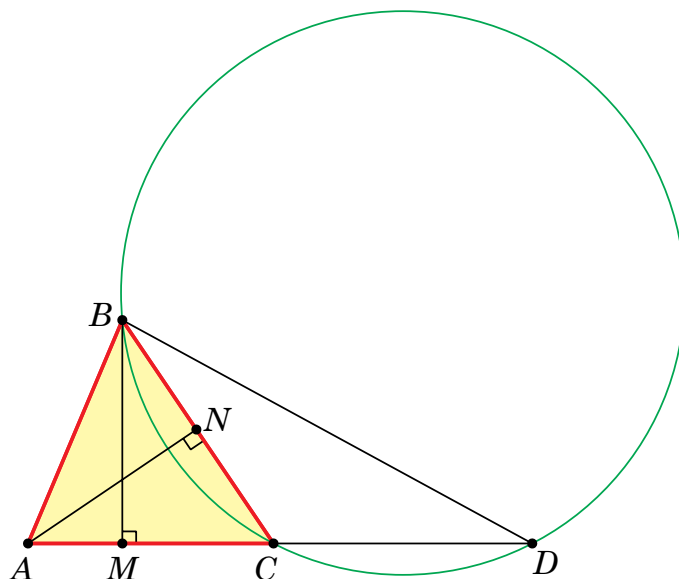
Приклад 6. Обчисліть $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, якщо $\cos \alpha = \frac{40}{41}$ і $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.



VII. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Паркова зона має форму гострокутного трикутника ABC (див. рисунок). Відомо, що $AB = 500$ м, а відстані від точок A і B до протилежних сторін трикутника дорівнюють відповідно 300 м і 200 м. Адміністрація міста планує розширити паркову зону так, щоб вона мала вигляд трикутника ABD (точка D лежить на промені AC), та побудувати бігову доріжку у формі кола, яка проходитиме через точки B , C та D , для проведення змагань з бігу. Розрахуйте довжину бігової доріжки, якщо відомо, що $BD = 900$ м. Відповідь подайте з точністю до сотих.



Задача 2. Олімпіадна задача. Відомо, що $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = p$, $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = q$. Знайдіть $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$.

VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

- Знайдіть значення виразу:
1) $\sin 14^\circ \cos 76^\circ + \cos 14^\circ \sin 76^\circ$; 2) $\cos 75^\circ \cos 105^\circ - \sin 75^\circ \sin 105^\circ$.
- Обчисліть:
1) $\frac{\sin 14^\circ \sin 46^\circ - \cos 14^\circ \cos 46^\circ}{\cos 32^\circ \sin 62^\circ - \sin 32^\circ \cos 62^\circ}$;
2) $\frac{\cos 8^\circ \sin 38^\circ - \sin 8^\circ \cos 38^\circ}{\sin 2^\circ \sin 58^\circ - \cos 2^\circ \cos 58^\circ} \cdot \frac{\operatorname{tg} 23^\circ + \operatorname{tg} 7^\circ}{1 - \operatorname{tg} 23^\circ \operatorname{tg} 7^\circ}$.
- Спростіть вираз $\frac{\sin(x-y) + \sin y \cos x}{\sin(x+y) - \cos x \sin y}$.
- Обчисліть:
1) $\sin 15^\circ$; 2) $\sin 75^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 75^\circ$; 4) $\operatorname{ctg} 15^\circ$.
- Дано: $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Знайдіть $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.
- Спростіть вираз:
1) $\frac{\operatorname{tg} 13^\circ + \operatorname{tg} 47^\circ}{1 - \operatorname{tg} 13^\circ \operatorname{tg} 47^\circ}$; 2) $\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{9} + \operatorname{tg} \frac{5\pi}{36}}{1 + \operatorname{tg} \frac{8\pi}{9} \operatorname{tg} \frac{5\pi}{36}}$; 3) $\frac{\operatorname{tg} 1^\circ - \operatorname{tg} 46^\circ}{1 + \operatorname{tg} 1^\circ \operatorname{tg} 46^\circ}$.

Рівень В

- Знайдіть значення виразу:
1) $\cos \frac{3\pi}{7} \cos \frac{\pi}{14} - \sin \frac{\pi}{14} \sin \frac{3\pi}{7}$; 2) $\cos \frac{3\pi}{8} \sin \frac{5\pi}{24} - \cos \frac{5\pi}{24} \sin \frac{3\pi}{8}$.
- Обчисліть:
1) $\frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}} + \frac{\cos \frac{\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{15} + \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{15}}{\sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{5\pi}{8} - \sin \frac{5\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8}}$;
2) $\frac{1 - \sqrt{3} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{12}}{\sqrt{3} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{12}} + \frac{\cos \frac{3\pi}{10} \cos \frac{2\pi}{15} + \sin \frac{3\pi}{10} \sin \frac{2\pi}{15}}{\sin \frac{\pi}{18} \cos \frac{\pi}{9} + \sin \frac{\pi}{9} \cos \frac{\pi}{18}}$.
- Спростіть вираз $\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{3} - \alpha\right) + \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{4\pi}{3} - \alpha\right)$.
- Обчисліть $(\operatorname{tg} 73^\circ - \operatorname{tg} 148^\circ)(1 + \operatorname{tg} 107^\circ \operatorname{tg} 32^\circ)^{-1}$.

5. Обчисліть:

- 1) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$, якщо $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ і $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;
2) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, якщо $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

6. Доведіть тотожність:

- 1) $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} = \cos \alpha \cos \beta$; 2) $\frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{1}{\sin \alpha \sin \beta}$;
3) $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}$; 4) $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha}$.

7. Обчисліть:

- 1) $\frac{\operatorname{tg}^2 \frac{7\pi}{24} - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{24}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{7\pi}{24} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{24}}$; 2) $\frac{\operatorname{tg}^2 \frac{5\pi}{24} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{24} - 1}{\operatorname{tg}^2 \frac{5\pi}{24} - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{24}}$.

8. Спростіть вираз:

- 1) $\frac{\sin(x - y) + \sin y \cos x}{\sin(x + y) - \cos x \sin y}$; 2) $\frac{\sqrt{2} \sin(45^\circ + x) - \cos x}{\sqrt{3} \cos x - 2 \cos(x - 30^\circ)}$;
3) $\frac{\cos(x - y) - 2 \sin x \sin y}{2 \sin x \cos y - \sin(x - y)}$; 4) $\frac{\sin(x + y) \sin(x - y) + \cos^2 x}{\cos(x + y) \cos(x - y) + \sin^2 x}$.

9. Відомо, що $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Знайдіть значення виразу $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)$.

10. Відомо, що $\cos \beta = -0,8$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$. Знайдіть $\operatorname{ctg}\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right)$.

11. Доведіть тотожність:

- 1) $\sin^2 x + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 0,25$; 2) $1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{1}{\cos 2\alpha}$.

12. Доведіть тотожність:

- 1) $\frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \beta - 1}{\operatorname{ctg}^2 \beta - \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) \operatorname{ctg}(\alpha - \beta)$; 2) $\frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta) - \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta) \operatorname{tg} \beta} = -\operatorname{tg} \alpha$.

Рівень С

1. Обчисліть:

- 1) $\operatorname{ctg} 35^\circ \operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{ctg} 35^\circ \operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{tg} 15^\circ \operatorname{tg} 20^\circ$;
2) $(\cos 26^\circ \operatorname{tg} 13^\circ - \sin 26^\circ)(\cos 26^\circ \operatorname{ctg} 13^\circ + \sin 26^\circ)$.

2. Спростіть вираз:

- 1) $\sin^2\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) + \sin^2 \alpha$; 2) $\cos^2 \beta + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - \beta\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + \beta\right)$.

3. Спростіть вираз:

- 1) $\frac{\sin^2(\alpha - \beta) + \sin^2(\alpha + \beta)}{2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta} - \operatorname{tg}^2 \alpha$;
2) $\operatorname{ctg}^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \beta - \frac{\cos^2(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha + \beta)}{2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}$.

4. Обчисліть $\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right)$, якщо відомо, що $2\cos^2 \alpha + (6 - \sqrt{2})\cos \alpha - 3\sqrt{2} = 0$.
5. Відомо, що для гострих кутів α і β виконуються рівності $\sin \alpha + \cos \beta = 1,2$ і $\cos \alpha + \sin \beta = 1,6$. Знайдіть кут $\alpha + \beta$.
6. Спростіть вираз $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$.
7. **Творче завдання.** Створіть інтерактивний тренажер для відпрацювання формул додавання.

Рефлексія

Оцініть розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Жахливі									Чудові

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася, або у вас усе ще залишилися запитання.

- 1)
- 2)
- ?

Можливі теми проєктів

1. Геометричне обґрунтування формул додавання.
2. Використання формул додавання в задачах фізики.
3. Створення тренажерів для запам'ятовування тригонометричних формул.
4. Роль формул додавання у побудові тригонометричних таблиць.
5. Розробка настільної гри або квесту для вивчення тригонометричних формул.







