

11

Тема 2. Співвідношення між тригонометричними функціями

Урок 4. Теореми (формули) додавання

Тип уроку: урок засвоєння нових знань.

План уроку

1. Косинус різниці та суми двох кутів.
2. Синус різниці та суми двох кутів.
3. Тангенс різниці та суми двох кутів.
4. Котангенс різниці та суми двох кутів.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

оцінює достовірність і доцільність використання даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 1.2.2–1 П];

аналізує спільні та відмінні риси різних моделей і шляхів розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1–1 П];

визначає та усуває прогалини у власних математичних знаннях і вміннях у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 4.1.3–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого. Завдання можна розв'язувати усно.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.

6) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С.

10) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чи можна за значеннями тригонометричних функцій певних кутів знаходити значення тригонометричних функцій для інших, невідомих кутів?

2) Чи можете ви спростувати твердження: «синус суми кутів дорівнює сумі синусів кутів»? Чи буде це твердження правильним для інших тригонометричних функцій?

3) Чи обов'язково запам'ятовувати десятки тригонометричних формул? Чи краще запам'ятати методи доведення формул?

4) Чи важливо знати, в якій чверті знаходиться кут, що є аргументом тригонометричної функції?

5) Навіщо потрібно знати формули, якщо можна деякі значення просто порахувати на калькуляторі чи в комп'ютерній програмі?

II. Повторення (3–4 хв)

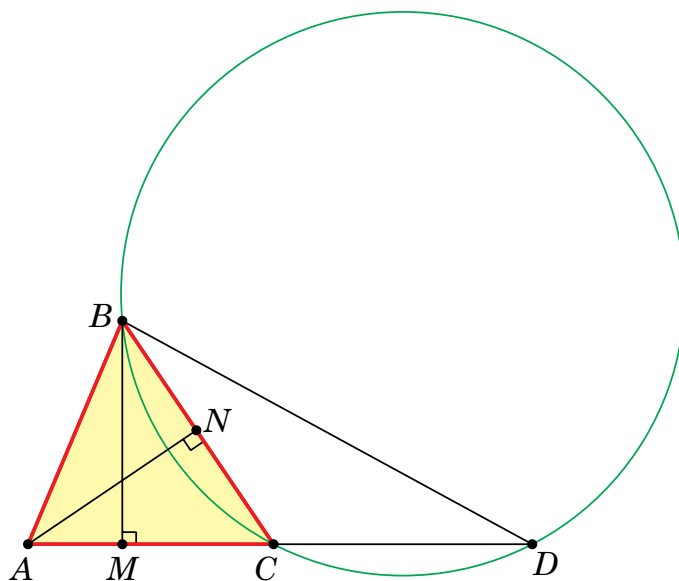
1. Подайте $\cos 126^\circ$ як косинус гострого кута.
Відповідь. $-\cos 54^\circ$.
2. Знайдіть відстань між точками $A(1; -3)$ та $B(-2; 5)$.
Відповідь. $\sqrt{73}$.
3. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника ABC , якщо $BC = 9$ см і $\angle A = 60^\circ$.
Відповідь. $3\sqrt{3}$ см.
4. Знайдіть значення виразу $4 \sin(-30^\circ) - 3 \operatorname{ctg}(-45^\circ) + 5 \cos(-60^\circ)$.
Відповідь. 3,5.

5. Кутом якої координатної чверті є кут α , якщо $\cos \alpha < 0$ і $\sin \alpha \cos \alpha < 0$?

Відповідь. Другої.

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Паркова зона має форму гострокутного трикутника ABC (див. рисунок). Відомо, що $AB = 500$ м, а відстані від точок A і B до протилежних сторін трикутника дорівнюють відповідно 300 м і 200 м. Адміністрація міста планує розширити паркову зону так, щоб вона мала вигляд трикутника ABD (точка D лежить на промені AC), та побудувати бігову доріжку у формі кола, яка проходитиме через точки B , C та D , для проведення змагань з бігу. Розрахуйте довжину бігової доріжки, якщо відомо, що $BD = 900$ м. Відповідь подайте з точністю до сотих.



Задача 2. Олімпіадна задача. Відомо, що $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = p$, $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = q$. Знайдіть $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$.

III. Косинус суми та різниці двох кутів

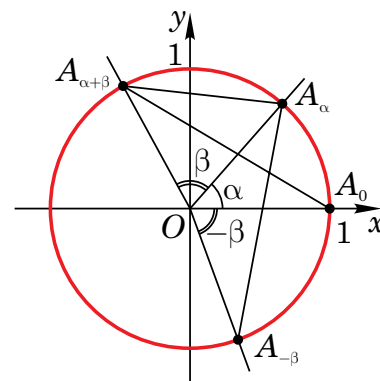
Формула косинуса суми кутів: $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$.

Доведення. Розглянемо одиничне коло, а на ньому точки A_α , $A_{\alpha+\beta}$ та $A_{-\beta}$ (див. рисунок).

Їм відповідають кути α , $\alpha + \beta$ та $-\beta$.

Оскільки трикутники $A_{-\beta}OA_\alpha$ та $A_{\alpha+\beta}OA_0$ — рівні, за першою ознакою рівності трикутників, то $A_\alpha A_{-\beta} = A_0 A_{\alpha+\beta}$.

Підставимо в останню рівність довжини цих відрізків, виражених координатами їхніх кінцевих точок. Для цього використаємо формулу відстані між двома точками.



Оскільки точка A_α має координати $(\cos \alpha; \sin \alpha)$, точка $A_{-\beta}$ — координати $(\cos \beta; -\sin \beta)$, а точка $A_{\alpha+\beta}$ — координати $(\cos(\alpha + \beta); \sin(\alpha + \beta))$, то маємо:

$$\sqrt{(\cos(\alpha + \beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha + \beta) - 0)^2} = \sqrt{(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta)^2},$$

$$\cos^2(\alpha + \beta) - 2 \cdot \cos(\alpha + \beta) + 1 + \sin^2(\alpha + \beta) =$$

$$= \cos^2 \alpha - 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta + \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha + 2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta + \sin^2 \beta,$$

$$-2 \cdot \cos(\alpha + \beta) + 2 = 2 - 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta + 2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta.$$

$$\text{Звідки } \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Формула косинуса різниці кутів: $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$.

Доведення. Застосуємо формулу косинуса суми для кутів α і $-\beta$:

$\cos(\alpha + (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$, що й треба було довести.

Примітка. Можна запропонувати спосіб доведення формули косинуса різниці двох кутів через скалярний добуток векторів.

Ілюстративні приклади

6. Обчисліть $\cos 75^\circ$.

Розв'язання. $\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Відповідь. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$

7. Обчисліть $\cos 15^\circ$.

Розв'язання. $\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Відповідь. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$

IV. Синус суми та різниці двох кутів

Формула синуса суми кутів: $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$.

Доведення. Доведемо деякі допоміжні твердження:

$$1) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{2} \sin \alpha = \sin \alpha.$$

$$2) \cos \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

$$\text{Отже, } \sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

Формула синуса різниці кутів: $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$.

Доведення. $\sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$.

Ілюстративні приклади

8. Спростіть вираз $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$.

Розв'язання. $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) =$
 $= \left(\sin \frac{\pi}{3} \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{3} \sin \alpha\right) - \left(\sin \frac{\pi}{3} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{3} \sin \alpha\right) =$
 $= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha = \sin \alpha.$

Відповідь. $\sin \alpha$.

9. Спростіть вираз $\sin 53^\circ \cos 7^\circ + \cos 53^\circ \sin 7^\circ$.

Розв'язання. $\sin 53^\circ \cos 7^\circ + \cos 53^\circ \sin 7^\circ = \sin(53^\circ + 7^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Відповідь. $\frac{\sqrt{3}}{2}.$

10. Доведіть тотожність $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$.

Розв'язання. $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$, що й треба було довести.

IV. Синус суми та різниці двох кутів

Формула синуса суми: $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$.

Доведення. Доведемо деякі допоміжні твердження:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{2} \sin \alpha = \sin \alpha.$

2) $\cos \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$

Отже, $\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) =$
 $= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$

Формула синуса різниці: $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$.

Доведення. $\sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$.

Ілюстративні приклади

11. Спростіть вираз $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$.

Розв'язання. $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) =$
 $= \left(\sin \frac{\pi}{3} \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{3} \sin \alpha\right) - \left(\sin \frac{\pi}{3} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{3} \sin \alpha\right) =$
 $= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha = \sin \alpha$.

Відповідь. $\sin \alpha$.

12. Спростіть вираз $\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) - \sin(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta)$.

Розв'язання. $\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) - \sin(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta) = \sin((\alpha + \beta) - (\alpha - \beta)) = \sin 2\beta$.

Відповідь. $\sin 2\beta$.

13. Спростіть вираз $\frac{\sqrt{3} \sin \alpha + 2 \cos(60^\circ + \alpha)}{2 \sin(60^\circ + \alpha) - \sqrt{3} \cos \alpha}$.

Розв'язання. $\frac{\sqrt{3} \sin \alpha + 2 \cos(60^\circ + \alpha)}{2 \sin(60^\circ + \alpha) - \sqrt{3} \cos \alpha} = \frac{\sqrt{3} \sin \alpha + 2(\cos 60^\circ \cos \alpha - \sin 60^\circ \sin \alpha)}{2(\sin 60^\circ \cos \alpha + \cos 60^\circ \sin \alpha) - \sqrt{3} \cos \alpha} =$
 $= \frac{\sqrt{3} \sin \alpha + 2\left(\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha\right)}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha\right) - \sqrt{3} \cos \alpha} = \frac{\sqrt{3} \sin \alpha + \cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha}{\sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$.

Відповідь. $\operatorname{ctg} \alpha$.

V. Тангенс і котангенс суми та різниці двох кутів

Формула тангенса суми кутів: $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$.

Доведення. $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta} =$
 $= \frac{\frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$.

Формула тангенса різниці кутів: $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$.

Доведення. $\operatorname{tg}(\alpha + (-\beta)) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(-\beta)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(-\beta)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$.

Формула котангенса суми кутів: $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$.

Доведення. $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta} =$

$$= \frac{\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \cos \beta}}{\frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \cos \beta}} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}.$$

Формула котангенса різниці кутів: $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}$.

Доведення. $\operatorname{ctg}(\alpha + (-\beta)) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg}(-\beta) - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}(-\beta)} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}$.

Ілюстративні приклади

14. Спростіть вираз $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)}$.

Розв'язання. $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)} = \operatorname{tg}\left(\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right) + \left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1.$

Відповідь. 1.

15. Спростіть вираз $\frac{\operatorname{ctg} 65^\circ \cdot \operatorname{ctg} 20^\circ + 1}{\operatorname{ctg} 20^\circ - \operatorname{ctg} 65^\circ}$.

Розв'язання. $\frac{\operatorname{ctg} 65^\circ \cdot \operatorname{ctg} 20^\circ + 1}{\operatorname{ctg} 20^\circ - \operatorname{ctg} 65^\circ} = \operatorname{ctg}(65^\circ - 20^\circ) = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1.$

Відповідь. 1.

16. Обчисліть $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, якщо $\cos \alpha = \frac{40}{41}$ і $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Розв'язання. $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + 1}{1 - \operatorname{tg} \alpha}.$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \frac{41^2}{40^2} - 1 = \frac{(41-40)(41+40)}{40^2} = \left(\frac{9}{40}\right)^2.$$

Оскільки $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, то $\operatorname{tg} \alpha < 0$, тобто $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{9}{40}$.

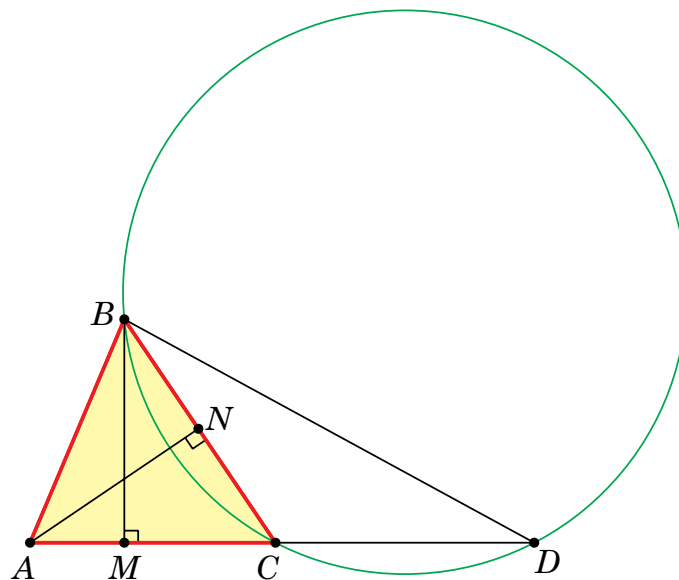
$$\text{Маємо } \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + 1}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{-\frac{9}{40} + 1}{1 - \left(-\frac{9}{40}\right)} = \frac{31}{49}.$$

Відповідь. $\frac{31}{49}$.

VII. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (7–10 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Паркова зона має форму гострокутного трикутника ABC (див. рисунок). Відомо, що $AB = 500$ м, а відстані від точок A і B до протилежних сторін трикутника дорівнюють відповідно 300 м і 200 м. Адміністрація міста планує розширити паркову зону так, щоб вона мала вигляд трикутника ABD (точка D лежить на промені AC), та побудувати бігову доріжку у формі кола, яка проходить через точки B , C та D , для проведення змагань з бігу. Розрахуйте довжину бігової доріжки, якщо відомо, що $BD = 900$ м. Відповідь подайте з точністю до сотих.



Розв'язання. 1) Нехай $\angle BAC = \alpha$, а $\angle ABC = \beta$, тоді, за властивістю зовнішнього кута трикутника: $\angle BCD = \alpha + \beta$.

$$2) \text{ З трикутника } ABM: \sin \alpha = \frac{200}{500} = \frac{2}{5}.$$

$$\text{З трикутника } ABN: \sin \beta = \frac{300}{500} = \frac{3}{5}.$$

3) Використаємо основну тригонометричну тотожність:

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{21}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5},$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

$$4) \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{\sqrt{21}}{5} \cdot \frac{3}{5} \approx 0,87.$$

5) З трикутника BCD , за теоремою синусів: $\frac{BD}{\sin(\alpha + \beta)} = 2R_{\triangle BCD}$, де $R_{\triangle BCD}$ — радіус кола, описаного навколо трикутника BCD .

$$\text{Тоді } R_{\triangle BCD} = \frac{BD}{2\sin(\alpha + \beta)} = \frac{900}{2 \cdot 0,87} = 517,24 \text{ (м)}.$$

$$6) \text{ Довжина кола: } 2\pi \cdot R_{\triangle BCD} \approx 3248,27 \text{ (м)}.$$

Відповідь. 3248,27 м.

Задача 2. Олімпіадна задача. Відомо, що $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = p$, $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = q$. Знайдіть $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$.

$$\text{Розв'язання. } q = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{p}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \text{ звідки } \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{p}{q}.$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{p}{1 - \frac{p}{q}} = \frac{pq}{q - p}.$$

$$\text{Відповідь. } \frac{pq}{q - p}.$$

VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Знайдіть значення виразу:

$$1) \sin 14^\circ \cos 76^\circ + \cos 14^\circ \sin 76^\circ;$$

$$2) \cos 75^\circ \cos 105^\circ - \sin 75^\circ \sin 105^\circ.$$

2. Обчисліть:

$$1) \frac{\sin 14^\circ \sin 46^\circ - \cos 14^\circ \cos 46^\circ}{\cos 32^\circ \sin 62^\circ - \sin 32^\circ \cos 62^\circ};$$

$$2) \frac{\cos 8^\circ \sin 38^\circ - \sin 8^\circ \cos 38^\circ}{\sin 2^\circ \sin 58^\circ - \cos 2^\circ \cos 58^\circ} \cdot \frac{\operatorname{tg} 23^\circ + \operatorname{tg} 7^\circ}{1 - \operatorname{tg} 23^\circ \operatorname{tg} 7^\circ}.$$

3. Спростіть вираз $\frac{\sin(x - y) + \sin y \cos x}{\sin(x + y) - \cos x \sin y}$.

4. Обчисліть:

$$1) \sin 15^\circ;$$

$$2) \sin 75^\circ;$$

$$3) \operatorname{tg} 75^\circ;$$

$$4) \operatorname{ctg} 15^\circ.$$

5. Дано: $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Знайдіть $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

6. Спростіть вираз:

$$1) \frac{\operatorname{tg} 13^\circ + \operatorname{tg} 47^\circ}{1 - \operatorname{tg} 13^\circ \operatorname{tg} 47^\circ};$$

$$2) \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{9} + \operatorname{tg} \frac{5\pi}{36}}{1 + \operatorname{tg} \frac{8\pi}{9} \operatorname{tg} \frac{5\pi}{36}};$$

$$3) \frac{\operatorname{tg} 1^\circ - \operatorname{tg} 46^\circ}{1 + \operatorname{tg} 1^\circ \operatorname{tg} 46^\circ}.$$

Рівень В

1. Знайдіть значення виразу:

1) $\cos \frac{3\pi}{7} \cos \frac{\pi}{14} - \sin \frac{\pi}{14} \sin \frac{3\pi}{7}$;

2) $\cos \frac{3\pi}{8} \sin \frac{5\pi}{24} - \cos \frac{5\pi}{24} \sin \frac{3\pi}{8}$.

2. Обчисліть:

1) $\frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}} + \frac{\cos \frac{\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{15} + \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{15}}{\sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{5\pi}{8} - \sin \frac{5\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8}}$;

2) $\frac{1 - \sqrt{3} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{12}}{\sqrt{3} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{12}} + \frac{\cos \frac{3\pi}{10} \cos \frac{2\pi}{15} + \sin \frac{3\pi}{10} \sin \frac{2\pi}{15}}{\sin \frac{\pi}{18} \cos \frac{\pi}{9} + \sin \frac{\pi}{9} \cos \frac{\pi}{18}}$.

3. Спростіть вираз $\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{3} - \alpha\right) + \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{4\pi}{3} - \alpha\right)$.

4. Обчисліть $(\operatorname{tg} 73^\circ - \operatorname{tg} 148^\circ)(1 + \operatorname{tg} 107^\circ \operatorname{tg} 32^\circ)^{-1}$.

5. Обчисліть:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$, якщо $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ і $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

2) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, якщо $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

6. Доведіть тотожність:

1) $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} = \cos \alpha \cos \beta$;

2) $\frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{1}{\sin \alpha \sin \beta}$;

3) $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}$;

4) $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha}$.

7. Обчисліть:

1) $\frac{\operatorname{tg}^2 \frac{7\pi}{24} - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{24}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{7\pi}{24} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{24}}$;

2) $\frac{\operatorname{tg}^2 \frac{5\pi}{24} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{24} - 1}{\operatorname{tg}^2 \frac{5\pi}{24} - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{24}}$.

8. Спростіть вираз:

1) $\frac{\sin(x - y) + \sin y \cos x}{\sin(x + y) - \cos x \sin y}$;

2) $\frac{\sqrt{2} \sin(45^\circ + x) - \cos x}{\sqrt{3} \cos x - 2 \cos(x - 30^\circ)}$;

3) $\frac{\cos(x - y) - 2 \sin x \sin y}{2 \sin x \cos y - \sin(x - y)}$;

4) $\frac{\sin(x + y) \sin(x - y) + \cos^2 x}{\cos(x + y) \cos(x - y) + \sin^2 x}$.

9. Відомо, що $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Знайдіть значення виразу $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)$.

10. Відомо, що $\cos \beta = -0,8$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$. Знайдіть $\operatorname{ctg}\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right)$.

11. Доведіть тотожність:

1) $\sin^2 x + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 0,25$; 2) $1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{1}{\cos 2\alpha}$.

12. Доведіть тотожність:

1) $\frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \beta - 1}{\operatorname{ctg}^2 \beta - \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) \operatorname{ctg}(\alpha - \beta);$ 2) $\frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta) - \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta) \operatorname{tg} \beta} = -\operatorname{tg} \alpha.$

Рівень С

1. Обчисліть:

- 1) $\operatorname{ctg} 35^\circ \operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{ctg} 35^\circ \operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{tg} 15^\circ \operatorname{tg} 20^\circ;$
2) $(\cos 26^\circ \operatorname{tg} 13^\circ - \sin 26^\circ)(\cos 26^\circ \operatorname{ctg} 13^\circ + \sin 26^\circ).$

2. Спростіть вираз:

1) $\sin^2\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) + \sin^2 \alpha;$ 2) $\cos^2 \beta + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - \beta\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + \beta\right).$

3. Спростіть вираз:

1) $\frac{\sin^2(\alpha - \beta) + \sin^2(\alpha + \beta)}{2\cos^2 \alpha \cos^2 \beta} - \operatorname{tg}^2 \alpha;$
2) $\operatorname{ctg}^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \beta - \frac{\cos^2(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha + \beta)}{2\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}.$

4. Обчисліть $\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right)$, якщо відомо, що $2\cos^2 \alpha + (6 - \sqrt{2})\cos \alpha - 3\sqrt{2} = 0.$

5. Відомо, що для гострих кутів α і β виконуються рівності $\sin \alpha + \cos \beta = 1,2$ і $\cos \alpha + \sin \beta = 1,6$. Знайдіть кут $\alpha + \beta$.

6. Спростіть вираз $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} + x\right).$

7. Творче завдання. Створіть інтерактивний тренажер для відпрацювання формул додавання.

IX. Рефлексія (1–2 хв)

Запропонуйте учням оцінити розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Жахливі									Чудові

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася, або у вас усе ще залишилися запитання.

- 1)
.....
.....
- 2)
.....
.....

?

.....

.....

Можливі теми проєктів

- 1.** Геометричне обґрунтування формул додавання.
- 2.** Використання формул додавання в задачах фізики.
- 3.** Створення тренажерів для запам'ятовування тригонометричних формул.
- 4.** Роль формул додавання у побудові тригонометричних таблиць.
- 5.** Розробка настільної гри або квесту для вивчення тригонометричних формул.