

Тема 2.

Співвідношення між тригонометричними функціями

Урок 5. Урок–практикум. Застосування теорем додавання

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) використовувати формули додавання для обчислення значень тригонометричних функцій;
- 2) використовувати формули додавання для спрощення і перетворення тригонометричних виразів;
- 3) використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Укажіть амплітуду гармонічного коливання, яке задане рівнянням
$$y = -2 \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2t\right).$$
2. Знайдіть $\sin \alpha$, якщо $\cos \alpha = 0,6$ і $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
3. Спростіть вираз $(1 - \sin x)(1 + \sin x)$.
4. Укажіть головний період функції $y = 2 \operatorname{tg}\left(-\frac{1}{3}x + 4\right)$.
5. Дослідіть на парність функцію $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

III. Обчислення значень тригонометричних функцій з використанням теорем додавання

Нагадаємо формули, вивчені на попередніх уроках.

1. $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.
2. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.
3. $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$.
4. $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.
5. $\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$.
6. $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$.
7. $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$.
8. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$.
9. $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$.
10. $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$.
11. $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$.
12. $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$.
13. $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}$.

Приклад 1. Знайдіть $\alpha - \beta$, якщо $\sin \alpha = \frac{40}{41}$, $\sin \beta = -\frac{9}{41}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$.

Розв'язання. Оскільки $0 < -\beta < \frac{\pi}{2}$, то $0 < \alpha - \beta < \pi$.

Маємо $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{9}{41}$, $\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \frac{40}{41}$.

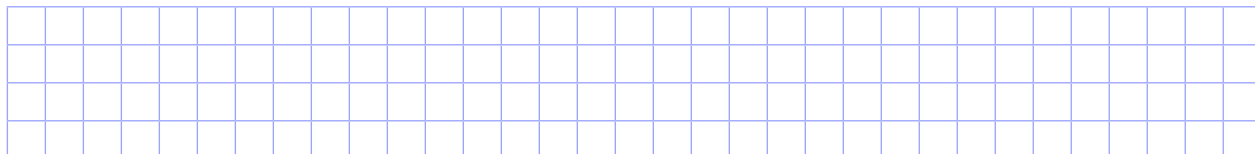
Тоді $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{9}{41} \cdot \frac{40}{41} + \frac{40}{41} \cdot \left(-\frac{9}{41}\right) = 0$.

Оскільки $\cos(\alpha - \beta) = 0$ і $0^\circ < \alpha - \beta < 180^\circ$, то $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$.

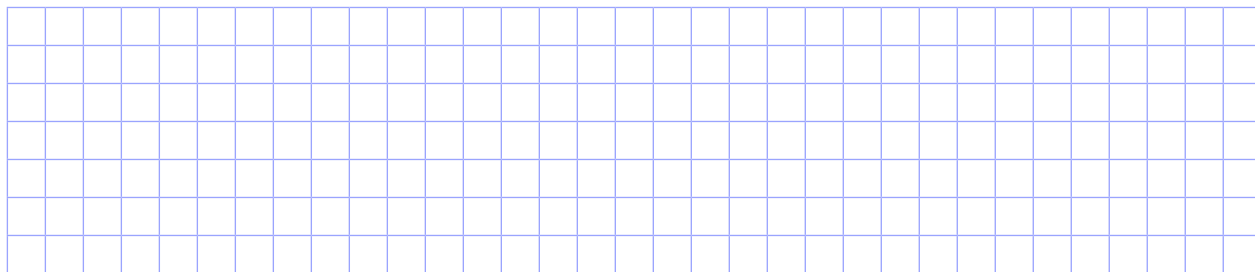
Відповідь. $\frac{\pi}{2}$.

Приклад 2. Обчисліть $\alpha + \beta + \gamma$, якщо відомо, що кути α, β, γ менші від $\frac{\pi}{6}$ і $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{12}$,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2}{5}, \operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{3}.$$



Приклад 3. Відомо, що $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $0^\circ < \beta < 90^\circ$. Знайдіть $\alpha + \beta$.



IV. Спрощення та перетворення тригонометричних виразів

Поради учням/ученицям

- 1) З'ясуйте, чи можна застосувати основну тригонометричну тотожність.
- 2) Якщо вираз містить тангенси або котангенси, то подайте їх, за означенням, у вигляді дробових виразів $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.
- 3) Якщо ви перетворюєте дробовий вираз, то шукайте способи, якими можна розкласти чисельник і знаменник на множники.
- 4) Якщо у виразі є декілька кутів, з'ясуйте, чи можливо застосувати формули зведення.
- 5) Якщо у виразі є тригонометрична функція суми чи різниці кутів, то спробуйте перетворити вираз за відповідними формулами.

Метод уведення допоміжного кута

Приклад 4. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $a \cos x + b \sin x$.

Розв'язання. $a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\sin x \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \cos x \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$.

Оскільки $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$, то існує точка з координатами

$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$ на одиничному колі.

Отже, існує такий кут φ , що $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ і $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Маємо: $a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} (\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$.

Оскільки $-1 \leq \sin(x + \varphi) \leq 1$, то $-\sqrt{a^2 + b^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi) \leq \sqrt{a^2 + b^2}$.

Отже, найменше значення виразу дорівнює $-\sqrt{a^2 + b^2}$, а найбільше значення становить $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Відповідь. $-\sqrt{a^2 + b^2}$; $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Приклад 5. Знайдіть найменше і найбільше значення виразу $\sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha$.

Розв'язання.

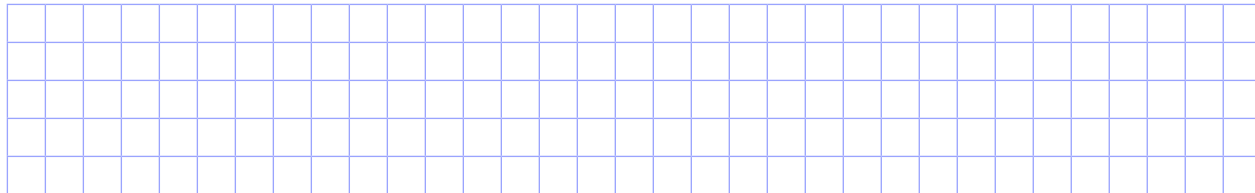
$$\sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha = 2 \left(\frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} \sin \alpha + \sin \frac{\pi}{3} \cos \alpha \right) = 2 \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right).$$

Оскільки $-1 \leq \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \leq 1$, то $-2 \leq 2 \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \leq 2$.

Отже, найменше значення виразу дорівнює -2 , а найбільше значення 2 .

Відповідь. -2 ; 2 .

Приклад 6. Доведіть тотожність $\cos 75^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ + \sin 75^\circ = \sqrt{2}$.



V. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Формули двох звукових хвиль, які є гармонічними коливаннями, мають вигляд $y_1 = 2 \sin \left(3t + \frac{\pi}{3} \right)$ та $y_2 = 2\sqrt{3} \cos \left(3t + \frac{\pi}{3} \right)$. Звукові хвилі накладаються і утворюють нову хвилю, яка теж є гармонічним коливанням. Визначте амплітуду та початкову фазу результуючого коливання.

Задача 2. Олімпіадна задача. Доведіть, що для будь-яких дійсних чисел $a, b \in [-1; 1]$ справджується нерівність $a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} \leq 1$.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Обчисліть $\cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right)$, якщо $\sin \alpha = -0,6$ і $\pi < \alpha < 1,5\pi$.
2. Спростіть вираз:
1) $\sin \left(\frac{\pi}{6} + \alpha \right)$; 2) $\cos(45^\circ + \alpha)$; 3) $\sin(\alpha - 45^\circ)$; 4) $\cos \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right)$.
3. Спростіть вираз:
1) $\cos \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) - \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{6} \right)$; 2) $\sin(30^\circ + \alpha) + \sin(30^\circ - \alpha)$;
3) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$; 4) $\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$.
4. Знайдіть $\cos \beta$, якщо $\cos \alpha = 0,6$, $\cos(\alpha + \beta) = 0$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

5. Знайдіть $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ і $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{3}$.
6. Спростіть вираз:
 1) $\sin \alpha \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cos \alpha$; 2) $\sin 5\beta \cos 3\beta - \sin 3\beta \cos 5\beta$.

Рівень В

1. Спростіть:

1) $\sin(\alpha + \beta) - \cos \alpha \cdot \sin \beta$; 2) $\frac{\sin \frac{3\pi}{8} \cdot \sin \frac{\pi}{8} - \cos \frac{3\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}$.

2. Доведіть тотожність:

1) $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \alpha$; 2) $\operatorname{ctg} \beta \sin 2\beta - \cos 2\beta = 1$.

3. Спростіть вираз:

1) $\cos \alpha - \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$; 2) $\sqrt{2} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + 3 \sin \alpha$;
 3) $2 \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \sin \alpha$; 4) $2 \sin\left(\frac{5\pi}{6} + \alpha\right) - \cos \alpha$.

4. Спростіть вираз:

1) $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$;
 2) $(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)^2 + (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)^2$.

5. Відомо, що $\sin \alpha = 0,28$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\cos \beta = -0,6$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$. Знайдіть:

1) $\sin(\alpha + \beta)$; 2) $\cos(\alpha - \beta)$.

6. Знайдіть найменше і найбільше значення виразу:

1) $\frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha$; 2) $\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha$.

7. Доведіть тотожність:

1) $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$; 2) $\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}$.

8. Доведіть тотожність:

1) $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$; 2) $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$.

9. Спростіть вираз $\frac{\sin(30^\circ + \beta) + \sin(30^\circ - \beta)}{\cos(\beta + 60^\circ) + \cos(\beta - 60^\circ)} \cdot \frac{\operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} 2\beta + 1}{\operatorname{ctg} 2\beta - \operatorname{ctg} \beta}$.

10. Спростіть вираз:

1) $\cos 3\alpha + \sin \alpha \sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha - \cos \alpha \cos 3\alpha$.

11. Обчисліть $\frac{1 - \sqrt{3} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{12}}{\sqrt{3} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{12}} + \frac{\cos \frac{3\pi}{10} \cos \frac{2\pi}{15} + \sin \frac{3\pi}{10} \sin \frac{2\pi}{15}}{\sin \frac{\pi}{18} \cos \frac{\pi}{9} + \sin \frac{\pi}{9} \cos \frac{\pi}{18}}$.

12. Знайдіть значення виразу $\frac{\cos(x - y)}{\cos(x + y)}$, якщо $\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = 5$.

Рівень С

1. Спростіть вираз:

$$1) \frac{\cos \frac{\pi}{30} \cdot \cos \frac{\pi}{15} + \sin \frac{\pi}{30} \cdot \sin \frac{\pi}{15}}{\sin \frac{7\pi}{30} \cdot \cos \frac{4\pi}{15} + \cos \frac{7\pi}{30} \cdot \sin \frac{4\pi}{15}};$$

$$2) \frac{\sin \frac{\pi}{10} \cdot \sin \frac{\pi}{5} + \cos \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5} \cdot \sin \frac{2\pi}{15} - \cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{15}}.$$

2. Обчисліть:

$$1) \cos(150^\circ - \alpha) - \cos(210^\circ + \alpha);$$

$$2) \sin(65^\circ + \alpha), \text{ якщо } \sin(20^\circ + \alpha) = 0,6 \text{ і } 0^\circ < \alpha < 30^\circ.$$

3. Знайдіть найменше і найбільше значення виразу:

$$1) 2 \sin \alpha + 5 \cos \alpha;$$

$$2) 6 \cos \alpha - 7 \sin \alpha.$$

4. Доведіть, що $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, якщо $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $\sin \beta = \frac{1}{3\sqrt{11}}$, $\sin \gamma = \frac{3}{\sqrt{11}}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$,

$$0 < \beta < \frac{\pi}{2}, 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}.$$

5. Доведіть, що $\sin(\alpha + \beta) < \cos \alpha + \cos \beta$, якщо $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

6. Нехай $\operatorname{tg} \alpha = (\sqrt{2} + 1) \operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg} \beta = (\sqrt{2} - 1) \operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg} \gamma = 2 \sin x \cos x$. Доведіть, що $\alpha = \beta + \gamma$, якщо $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$.

7. Творче завдання. Напишіть програму, яка за значеннями тригонометричних функцій кутів обчислює значення тригонометричних функцій від суми та різниці заданих кутів.

VII. Рефлексія. «Плюс-Мінус-Цікавинка»

(+) що було зрозумілим:

(-) що залишилося незрозумілим:

(?) що здивувало або зацікавило:

Можливі теми проєктів

- 1.** Додавання гармонічних коливань однакової частоти.
- 2.** Історичне дослідження відкриття формул додавання в тригонометрії.
- 3.** Формули додавання в музиці.
- 4.** Формули додавання у створенні анімації та в комп'ютерній графіці.
- 5.** Використання формул додавання при керуванні роботами та дронами.







