

11

Тема 2. Співвідношення між тригонометричними функціями

Урок 5. Урок–практикум. Застосування теорем додавання

Тип уроку: урок засвоєння нових знань.

План уроку

1. Обчислення значень тригонометричних функцій з використанням теорем додавання.
2. Спрощення та перетворення виразів.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

самостійно або у співпраці з іншими буде математичні моделі специфічних проблемних ситуацій, добирає математичні засоби для побудови моделей, ураховуючи можливі ризики [12 МАО 2.3.2–1 П];

оцінює обґрунтованість математичного розв'язання в контексті реальної комплексної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.3–1 П];

добирає доцільні математичні поняття, факти і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого. Завдання можна розв'язувати усно.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.

- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.
- 6) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.
- 7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.
- 9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівень В або рівень С.
- 10) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Що спільного між музикою, коливаннями та формулами додавання?
- 2) Чи замислювалися ви, як комп'ютер «бачить» обертання?
- 3) Чи можна за значеннями тригонометричних функцій для кутів першої чверті, дізнатися значення для будь-яких кутів?
- 4) Чи можна проілюструвати формули додавання за допомогою графіків функцій?
- 5) Чому інженер, який будує міст, зобов'язаний знати й розуміти формули тригонометрії?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Укажіть амплітуду гармонічного коливання, яке задане рівнянням
$$y = -2 \sin \left(\frac{\pi}{6} - 2t \right).$$
Відповідь. 2.
2. Знайдіть $\sin \alpha$, якщо $\cos \alpha = 0,6$ і $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.*Відповідь.* 0,8.
3. Спростіть вираз $(1 - \sin x)(1 + \sin x)$.*Відповідь.* $\cos^2 x$.

4. Укажіть головний період функції $y = 2 \operatorname{tg} \left(-\frac{1}{3}x + 4 \right)$.

Відповідь. 3π .

5. Дослідіть на парність функцію $y = \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right)$.

Відповідь. Функція парна.

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Формули двох звукових хвиль, які є гармонічними коливаннями, мають вигляд $y_1 = 2 \sin \left(3t + \frac{\pi}{3} \right)$ та $y_2 = 2\sqrt{3} \cos \left(3t + \frac{\pi}{3} \right)$. Звукові хвилі накладаються і утворюють нову хвилю, яка теж є гармонічним коливанням. Визначте амплітуду та початкову фазу результуючого коливання.

Задача 2. Олімпіадна задача. Доведіть, що для будь-яких дійсних чисел $a, b \in [-1; 1]$ справджується нерівність $a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} \leq 1$.

III. Обчислення значень тригонометричних функцій з використанням теорем додавання

Нагадаємо формули, вивчені на попередніх уроках.

1. $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.
2. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.
3. $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$.
4. $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.
5. $\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$.
6. $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$.
7. $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$.
8. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$.
9. $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$.
10. $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$.
11. $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$.
12. $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$.
13. $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}$.

Ілюстративні приклади

- 6.** Знайдіть $\alpha - \beta$, якщо $\sin \alpha = \frac{40}{41}$, $\sin \beta = -\frac{9}{41}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$.

Розв'язання. Оскільки $0 < -\beta < \frac{\pi}{2}$, то $0 < \alpha - \beta < \pi$.

$$\text{Маємо } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{9}{41}, \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \frac{40}{41}.$$

$$\text{Тоді } \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{9}{41} \cdot \frac{40}{41} + \frac{40}{41} \cdot \left(-\frac{9}{41}\right) = 0.$$

Оскільки $\cos(\alpha - \beta) = 0$ і $0^\circ < \alpha - \beta < 180^\circ$, то $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$.

Відповідь. $\frac{\pi}{2}$.

- 7.** Обчисліть $\alpha + \beta + \gamma$, якщо відомо, що кути α , β , γ менші від $\frac{\pi}{6}$ і $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{12}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{2}{5}$, $\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{3}$.

$$\text{Розв'язання. Обчислимо } \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{\frac{1}{12} + \frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{12} \cdot \frac{2}{5}} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Обчислимо } \operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) + \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \operatorname{tg} \gamma} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1.$$

Звідки $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$.

Відповідь. $\frac{\pi}{4}$.

- 8.** Відомо, що $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $0^\circ < \beta < 90^\circ$. Знайдіть $\alpha + \beta$.

Розв'язання. Оскільки $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $0^\circ < \beta < 90^\circ$, то $0^\circ < \alpha + \beta < 180^\circ$.

На цьому проміжку косинус набуває кожного свого значення з проміжку $(-1; 1)$ один раз. Отже, за значенням $\cos(\alpha + \beta)$ можна визначити і значення $\alpha + \beta$.

$$\text{Маємо } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

$$\text{Тоді } \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = -\frac{5}{\sqrt{50}} = -\frac{5}{5\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Оскільки $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ і $0^\circ < \alpha + \beta < 180^\circ$, то $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$.

Відповідь. $\frac{3\pi}{4}$.

- 9.** Дано: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{8}{15}$, $\operatorname{ctg} \beta = -\frac{7}{24}$, $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, $0^\circ < \beta < 180^\circ$. Знайдіть $\sin(\alpha + \beta)$.

Розв'язання. Оскільки $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ і $\operatorname{ctg} \alpha > 0$, то $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $\sin \alpha > 0$.

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1 + \frac{64}{225} = \frac{289}{225},$$

$$\text{Якщо } \sin^2 \alpha = \frac{225}{289}, \text{ то } \sin \alpha = \frac{15}{17}.$$

$$\text{Обчислимо } \cos \alpha = \operatorname{ctg} \alpha \sin \alpha = \frac{8}{15} \cdot \frac{15}{17} = \frac{8}{17}.$$

Оскільки $0^\circ < \beta < 180^\circ$ і $\operatorname{ctg} \beta < 0$, то $90^\circ < \beta < 180^\circ$ і $\sin \beta > 0$.

$$\frac{1}{\sin^2 \beta} = 1 + \operatorname{ctg}^2 \beta = 1 + \frac{49}{576} = \frac{625}{576}.$$

$$\text{Оскільки } \sin^2 \beta = \frac{576}{625}, \text{ то } \sin \beta = \frac{24}{25}.$$

$$\text{Обчислимо } \cos \beta = \operatorname{ctg} \beta \sin \beta = -\frac{7}{24} \cdot \frac{24}{25} = -\frac{7}{25}.$$

$$\text{Отже, } \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{15}{17} \cdot \left(-\frac{7}{25}\right) + \frac{8}{17} \cdot \frac{24}{25} = \frac{87}{425}.$$

$$\text{Відповідь. } \frac{87}{425}.$$

IV. Спрощення та перетворення тригонометричних виразів

Поради учням/ученицям

- 1) З'ясуйте, чи можна застосувати основну тригонометричну тотожність.
- 2) Якщо вираз містить тангенси або котангенси, то подайте їх, за означенням, у вигляді дробових виразів $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.
- 3) Якщо ви перетворюєте дробовий вираз, то шукайте способи, якими можна розкласти чисельник і знаменник на множники.
- 4) Якщо у виразі є декілька кутів, з'ясуйте, чи можливо застосувати формули зведення.
- 5) Якщо у виразі є тригонометрична функція суми чи різниці кутів, то спробуйте перетворити вираз за відповідними формулами.

Метод введення допоміжного кута

- 10.** Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $a \cos x + b \sin x$.

$$\text{Розв'язання. } a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\sin x \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \cos x \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

$$\text{Оскільки } \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1, \text{ то існує точка з координатами}$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \text{ на одиничному колі.}$$

Отже, існує такий кут φ , що $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ і $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Маємо: $a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} (\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$.

Оскільки $-1 \leq \sin(x + \varphi) \leq 1$, то $-\sqrt{a^2 + b^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi) \leq \sqrt{a^2 + b^2}$.

Отже, найменше значення виразу дорівнює $-\sqrt{a^2 + b^2}$, а найбільше значення становить $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Відповідь. $-\sqrt{a^2 + b^2}$; $\sqrt{a^2 + b^2}$.

- 11.** Знайдіть найменше і найбільше значення виразу $\sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha$.

Розв'язання.

$$\sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha = 2 \left(\frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} \sin \alpha + \sin \frac{\pi}{3} \cos \alpha \right) = 2 \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right).$$

Оскільки $-1 \leq \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \leq 1$, то $-2 \leq 2 \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \leq 2$.

Отже, найменше значення виразу дорівнює -2 , а найбільше значення 2 .

Відповідь. -2 ; 2 .

- 12.** Доведіть тотожність $\cos 75^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ + \sin 75^\circ = \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання. } \cos 75^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ + \sin 75^\circ &= \frac{\cos 75^\circ \cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} + \sin 75^\circ = \\ &= \frac{\cos 75^\circ \cos 30^\circ + \sin 75^\circ \sin 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\cos(75^\circ - 30^\circ)}{\sin 30^\circ} = \frac{\cos 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Що й треба було довести.

- 13.** Спростіть вираз $\cos \alpha + \cos(120^\circ - \alpha) + \cos(120^\circ + \alpha)$.

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання. } \cos \alpha + \cos(120^\circ - \alpha) + \cos(120^\circ + \alpha) &= \\ &= \cos \alpha + \cos 120^\circ \cos \alpha + \sin 120^\circ \sin \alpha + \cos 120^\circ \cos \alpha - \sin 120^\circ \sin \alpha = \\ &= \cos \alpha + 2 \cos 120^\circ \cos \alpha = \cos \alpha + 2 \cos(180^\circ - 60^\circ) \cos \alpha = \\ &= \cos \alpha - 2 \cos 60^\circ \cos \alpha = \cos \alpha - \cos \alpha = 0. \end{aligned}$$

Відповідь. 0 .

- 14.** Спростіть вираз $\sin 20^\circ + 2 \sin 40^\circ - \sin 100^\circ$.

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання. } \sin 20^\circ + 2 \sin 40^\circ - \sin 100^\circ &= \\ &= \sin(30^\circ - 10^\circ) + 2 \sin(30^\circ + 10^\circ) - \sin(90^\circ + 10^\circ) = \\ &= \sin 30^\circ \cos 10^\circ - \cos 30^\circ \sin 10^\circ + 2 \sin 30^\circ \cos 10^\circ + 2 \cos 30^\circ \sin 10^\circ - \cos 10^\circ = \\ &= \sin 30^\circ \cos 10^\circ + \cos 30^\circ \sin 10^\circ + 2 \cdot \frac{1}{2} \cos 10^\circ - \cos 10^\circ = \sin(30^\circ + 10^\circ) = \sin 40^\circ. \end{aligned}$$

Відповідь. $\sin 40^\circ$.

- 15.** Доведіть тотожність $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$.

$$\begin{aligned} \text{Доведення. } \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) &= (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) = \\ &= \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta = \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) - \sin^2 \beta (1 - \sin^2 \alpha) = \\ &= \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta, \text{ що й треба було довести.} \end{aligned}$$

V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (6–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Формули двох звукових хвиль, які є гармонічними коливаннями, мають вигляд $y_1 = 2\sin\left(3t + \frac{\pi}{3}\right)$ та $y_2 = 2\sqrt{3}\cos\left(3t + \frac{\pi}{3}\right)$. Звукові хвилі накладаються і утворюють нову хвилю, яка теж є гармонічним коливанням. Визначте амплітуду та початкову фазу результуючого коливання.

$$\begin{aligned}\text{Розв'язання. } y_1 + y_2 &= 2\sin\left(3t + \frac{\pi}{3}\right) + 2\sqrt{3}\cos\left(3t + \frac{\pi}{3}\right) = \\ &= 4\left(\frac{1}{2}\sin\left(3t + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(3t + \frac{\pi}{3}\right)\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin\left(3t + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\frac{\pi}{3}\cos\left(3t + \frac{\pi}{3}\right)\right) = \\ &= 4\sin\left(3t + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = 4\sin\left(3t + \frac{2\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

Отже, амплітуда результуючого коливання дорівнює 4, а початкова фаза становить $\frac{2\pi}{3}$.

Відповідь. 4; $\frac{2\pi}{3}$.

Задача 2. Олімпіадна задача. Доведіть, що для будь-яких дійсних чисел $a, b \in [-1; 1]$ справджується нерівність $a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} \leq 1$.

Розв'язання. Оскільки $a, b \in [-1; 1]$, то нехай $a = \sin \alpha$, $b = \sin \beta$. Тоді $a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} = \sin \alpha \sqrt{1-\sin^2 \beta} + \sin \beta \sqrt{1-\sin^2 \alpha} = \sin \alpha \sqrt{\cos^2 \beta} + \sin \beta \sqrt{\cos^2 \alpha} = \sin \alpha |\cos \beta| + \sin \beta |\cos \alpha| \leq \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \sin(\alpha + \beta) \leq 1$, що й треба було довести.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (5–10 хв)

Рівень А

- Обчисліть $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$, якщо $\sin \alpha = -0,6$ і $\pi < \alpha < 1,5\pi$.
- Спростіть вираз:
1) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$; 2) $\cos(45^\circ + \alpha)$; 3) $\sin(\alpha - 45^\circ)$; 4) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$.
- Спростіть вираз:
1) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$; 2) $\sin(30^\circ + \alpha) + \sin(30^\circ - \alpha)$;
3) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$; 4) $\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$.
- Знайдіть $\cos \beta$, якщо $\cos \alpha = 0,6$, $\cos(\alpha + \beta) = 0$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

5. Знайдіть $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ і $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{3}$.
6. Спростіть вираз:
 1) $\sin \alpha \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cos \alpha$; 2) $\sin 5\beta \cos 3\beta - \sin 3\beta \cos 5\beta$.

Рівень В

1. Спростіть:

1) $\sin(\alpha + \beta) - \cos \alpha \cdot \sin \beta$; 2) $\frac{\sin \frac{3\pi}{8} \cdot \sin \frac{\pi}{8} - \cos \frac{3\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}$.

2. Доведіть тотожність:

1) $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \alpha$; 2) $\operatorname{ctg} \beta \sin 2\beta - \cos 2\beta = 1$.

3. Спростіть вираз:

1) $\cos \alpha - \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$; 2) $\sqrt{2} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + 3 \sin \alpha$;
 3) $2 \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \sin \alpha$; 4) $2 \sin\left(\frac{5\pi}{6} + \alpha\right) - \cos \alpha$.

4. Спростіть вираз:

1) $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$;
 2) $(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)^2 + (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)^2$.

5. Відомо, що $\sin \alpha = 0,28$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\cos \beta = -0,6$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$. Знайдіть:

1) $\sin(\alpha + \beta)$; 2) $\cos(\alpha - \beta)$.

6. Знайдіть найменше і найбільше значення виразу:

1) $\frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha$; 2) $\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha$.

7. Доведіть тотожність:

1) $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$; 2) $\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}$.

8. Доведіть тотожність:

1) $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$; 2) $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$.

9. Спростіть вираз $\frac{\sin(30^\circ + \beta) + \sin(30^\circ - \beta)}{\cos(\beta + 60^\circ) + \cos(\beta - 60^\circ)} \cdot \frac{\operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} 2\beta + 1}{\operatorname{ctg} 2\beta - \operatorname{ctg} \beta}$.

10. Спростіть вираз:

1) $\cos 3\alpha + \sin \alpha \sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha - \cos \alpha \cos 3\alpha$.

11. Обчисліть $\frac{1 - \sqrt{3} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{12}}{\sqrt{3} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{12}} + \frac{\cos \frac{3\pi}{10} \cos \frac{2\pi}{15} + \sin \frac{3\pi}{10} \sin \frac{2\pi}{15}}{\sin \frac{\pi}{18} \cos \frac{\pi}{9} + \sin \frac{\pi}{9} \cos \frac{\pi}{18}}$.

12. Знайдіть значення виразу $\frac{\cos(x - y)}{\cos(x + y)}$, якщо $\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = 5$.

Рівень С

1. Спростіть вираз:

$$1) \frac{\cos \frac{\pi}{30} \cdot \cos \frac{\pi}{15} + \sin \frac{\pi}{30} \cdot \sin \frac{\pi}{15}}{\sin \frac{7\pi}{30} \cdot \cos \frac{4\pi}{15} + \cos \frac{7\pi}{30} \cdot \sin \frac{4\pi}{15}};$$

$$2) \frac{\sin \frac{\pi}{10} \cdot \sin \frac{\pi}{5} + \cos \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5} \cdot \sin \frac{2\pi}{15} - \cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{15}}.$$

2. Обчисліть:

$$1) \cos(150^\circ - \alpha) - \cos(210^\circ + \alpha);$$

$$2) \sin(65^\circ + \alpha), \text{ якщо } \sin(20^\circ + \alpha) = 0,6 \text{ і } 0^\circ < \alpha < 30^\circ.$$

3. Знайдіть найменше і найбільше значення виразу:

$$1) 2 \sin \alpha + 5 \cos \alpha;$$

$$2) 6 \cos \alpha - 7 \sin \alpha.$$

4. Доведіть, що $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, якщо $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $\sin \beta = \frac{1}{3\sqrt{11}}$, $\sin \gamma = \frac{3}{\sqrt{11}}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$,

$$0 < \beta < \frac{\pi}{2}, 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}.$$

5. Доведіть, що $\sin(\alpha + \beta) < \cos \alpha + \cos \beta$, якщо $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

6. Нехай $\operatorname{tg} \alpha = (\sqrt{2} + 1) \operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg} \beta = (\sqrt{2} - 1) \operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg} \gamma = 2 \sin x \cos x$. Доведіть, що $\alpha = \beta + \gamma$, якщо $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$.

7. Творче завдання. Напишіть програму, яка за значеннями тригонометричних функцій кутів обчислює значення тригонометричних функцій від суми та різниці заданих кутів.

VII. Рефлексія. «Плюс-Мінус-Цікавинка» (1–2 хв)

(+) що було зрозумілим:

(–) що залишилося незрозумілим:

(?) що здивувало або зацікавило:

Можливі теми проєктів

- 1.** Додавання гармонічних коливань однакової частоти.
- 2.** Історичне дослідження відкриття формул додавання в тригонометрії.
- 3.** Формули додавання в музиці.
- 4.** Формули додавання у створенні анімації та в комп'ютерній графіці.
- 5.** Використання формул додавання при керуванні роботами та дронами.