

Тема 2.

Співвідношення між тригонометричними функціями

Урок 6. Формули зведення

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) ознайомитеся з формулами зведення та доведете їх;
- 2) вивчите мнемонічне правило, яке допомагає запам'ятати всі формули зведення;
- 3) навчитесь використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Обчисліть $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $\cos \alpha = -\frac{24}{25}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.
2. Спростіть вираз $\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos \alpha$.
3. Обчисліть $\cos 71^\circ \cdot \cos 26^\circ + \sin 71^\circ \cdot \sin 26^\circ$.
4. Знайдіть значення виразу $\frac{1 + \operatorname{tg} 67^\circ \cdot \operatorname{tg} 7^\circ}{\operatorname{tg} 67^\circ - \operatorname{tg} 7^\circ}$.
5. Знайдіть $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 2$.

III. Формули зведення для синуса

Формули зведення — це формули, за якими можна значення тригонометричних функцій будь-якого кута α , такого, що $0^\circ < \alpha < 360^\circ$, виразити через відповідні значення тригонометричних функцій гострого кута.

Усі формули зведення подано лише як довідниковий матеріал. Важливо сформулювати мнемонічне правило для розуміння формул.

У формулах зведення кут α — гострий кут, тобто $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

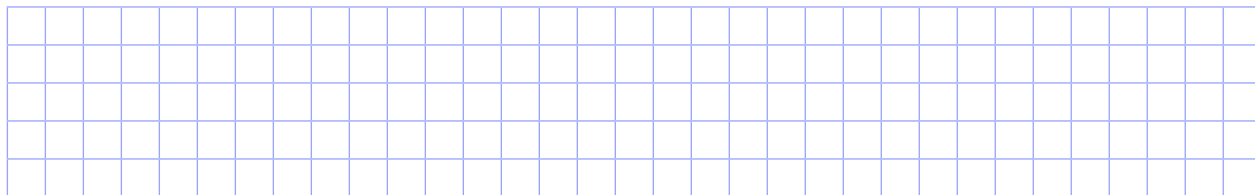
- 1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \frac{\pi}{2} \cos \alpha - \sin \alpha \cos \frac{\pi}{2} = \cos \alpha$.
- 2) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \frac{\pi}{2} \cos \alpha + \sin \alpha \cos \frac{\pi}{2} = \cos \alpha$.
- 3) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \frac{3\pi}{2} \cos \alpha - \sin \alpha \cos \frac{3\pi}{2} = -\cos \alpha$.
- 4) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \frac{3\pi}{2} \cos \alpha + \sin \alpha \cos \frac{3\pi}{2} = -\cos \alpha$.
- 5) $\sin(\pi - \alpha) = \sin \pi \cos \alpha - \sin \alpha \cos \pi = \sin \alpha$.
- 6) $\sin(\pi + \alpha) = \sin \pi \cos \alpha + \sin \alpha \cos \pi = -\sin \alpha$.
- 7) $\sin(2\pi - \alpha) = \sin 2\pi \cos \alpha - \sin \alpha \cos 2\pi = -\sin \alpha$.
- 8) $\sin(2\pi + \alpha) = \sin 2\pi \cos \alpha + \sin \alpha \cos 2\pi = \sin \alpha$.

Приклад 1. Обчисліть $\sin 870^\circ$.

Розв'язання. $\sin 870^\circ = \sin(2 \cdot 360^\circ + 150^\circ) = \sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = 0,5$.

Відповідь. 0,5.

Приклад 2. Обчисліть $\sin \frac{15\pi}{4}$.



IV. Формули зведення для косинуса

- 1) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \alpha + \sin \alpha \sin \frac{\pi}{2} = \sin \alpha$.
- 2) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \alpha - \sin \alpha \sin \frac{\pi}{2} = -\sin \alpha$.
- 3) $\cos(\pi - \alpha) = \cos \pi \cos \alpha + \cos \alpha \cos \pi = -\cos \alpha$.
- 4) $\cos(\pi + \alpha) = \cos \pi \cos \alpha + \cos \alpha \cos \pi = -\cos \alpha$.
- 5) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \frac{3\pi}{2} \cos \alpha + \sin \alpha \sin \frac{3\pi}{2} = -\sin \alpha$.
- 6) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \frac{3\pi}{2} \cos \alpha - \sin \alpha \sin \frac{3\pi}{2} = \sin \alpha$.
- 7) $\cos(2\pi - \alpha) = \cos 2\pi \cos \alpha + \cos \alpha \cos 2\pi = \cos \alpha$.
- 8) $\cos(2\pi + \alpha) = \cos 2\pi \cos \alpha - \cos \alpha \cos 2\pi = \cos \alpha$.

[illegible]

V. Формули зведення для тангенса

$$1) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

$$2) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

$$3) \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha.$$

$$4) \operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \frac{\sin(\pi + \alpha)}{\cos(\pi + \alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$$

$$5) \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{-\cos \alpha}{-\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$6) \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{-\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

$$7) \operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = \frac{\sin(2\pi - \alpha)}{\cos(2\pi - \alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha.$$

$$8) \operatorname{tg}(2\pi + \alpha) = \frac{\sin(2\pi + \alpha)}{\cos(2\pi + \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Приклад 2. ТОТОЖНІСТЬ $\frac{\operatorname{tg}(\pi - \alpha) \sin(1,5\pi + \alpha)}{\cos(\pi + \alpha) \operatorname{tg}(1,5\pi + \alpha)} = \operatorname{tg}^2 \alpha$.

[illegible]

VI. Формули зведення для котангенса

$$1) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$$

$$2) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha.$$

$$3) \operatorname{ctg}(\pi-\alpha)=\frac{\cos(\pi-\alpha)}{\sin(\pi-\alpha)}=\frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

$$4) \operatorname{ctg}(\pi+\alpha)=\frac{\cos(\pi+\alpha)}{\sin(\pi+\alpha)}=\frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

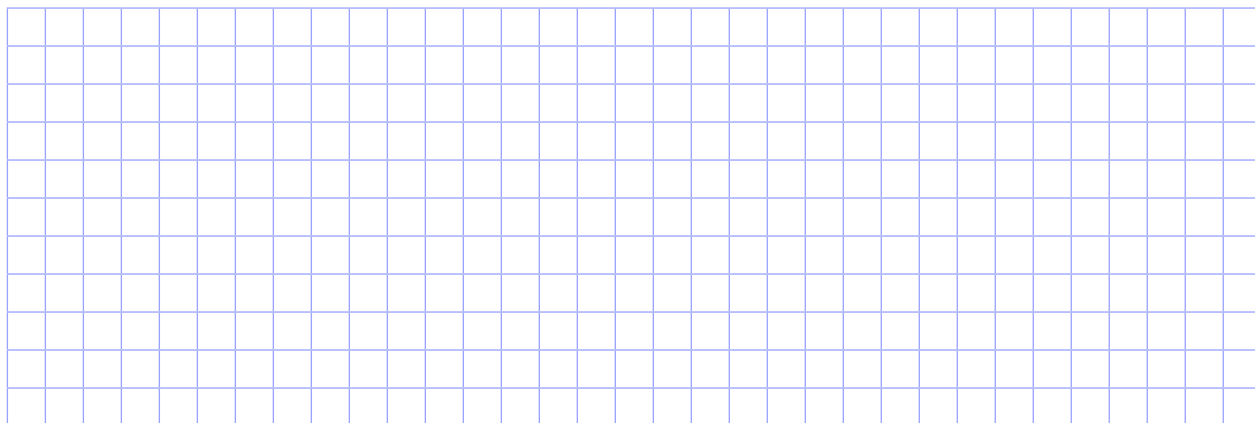
$$5) \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$$

$$6) \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha.$$

$$7) \operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)=\frac{\cos(2\pi-\alpha)}{\sin(2\pi-\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

$$8) \operatorname{ctg}(2\pi+\alpha)=\frac{\cos(2\pi+\alpha)}{\sin(2\pi+\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Приклад 5. Спростіть вираз
$$\frac{\sin(\pi-\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}.$$



ІХ. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Спростіть вираз:

- 1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; 2) $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$; 3) $\operatorname{ctg}(270^\circ + \alpha)$;
4) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; 5) $\cos(\pi + \alpha)$; 6) $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$.

2. Спростіть вираз:

- 1) $\frac{\sin(2\pi - \alpha) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos(2\pi + \alpha) \operatorname{tg}(\pi + \alpha)}$; 2) $\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \operatorname{tg}(\pi + \alpha) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos(\pi + \alpha)}$.

3. Обчисліть:

- 1) $\cos 240^\circ$; 2) $\operatorname{tg} 225^\circ$; 3) $\operatorname{ctg} 330^\circ$; 4) $\sin 150^\circ$.

4. Зведіть вирази до значення тригонометричної функції найменшого додатного аргументу:

- 1) $\sin 216^\circ$; 2) $\cos 400^\circ$; 3) $\operatorname{ctg} 194^\circ$; 4) $\operatorname{tg}(-0,7\pi)$.

5. Обчисліть:

- 1) $\operatorname{ctg} \frac{11\pi}{6}$; 2) $\sin 1110^\circ$; 3) $\cos \frac{13\pi}{6}$; 4) $\operatorname{ctg}(-1200^\circ)$.

6. Спростіть вираз:

- 1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; 2) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;
3) $\sin(\pi + \alpha) - \operatorname{tg}(\pi - \alpha)$; 4) $\sin(270^\circ - \alpha) + \cos(270^\circ + \alpha)$.

Рівень В

1. Знайдіть гострий кут α , для якого виконується рівність:

- 1) $\cos 75^\circ = \cos(90^\circ - \alpha)$; 2) $\sin \frac{5}{4}\pi = \sin(\pi + \alpha)$;
3) $\sin 150^\circ = \sin(90^\circ + \alpha)$; 4) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{5} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;
5) $\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - \alpha)$; 6) $\cos \frac{7\pi}{4} = \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$;
7) $\cos 310^\circ = \cos(270^\circ + \alpha)$; 8) $\operatorname{ctg} \frac{11}{6}\pi = \operatorname{ctg}(2\pi - \alpha)$.

2. Спростіть вираз:

- 1) $\sin^2(\pi - x) + \operatorname{tg}^2(\pi - x) \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cos(x - 2\pi)$;
2) $\frac{\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) \cos(180^\circ - \alpha) \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ + \alpha) \operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha)}$.

3. Обчисліть:

$$1) \frac{\sin^2 315^\circ \cos 300^\circ + \operatorname{tg}(-315^\circ)}{\sin(-120^\circ) \cos 150^\circ};$$

$$2) \frac{6 \cos^2(-240^\circ) \operatorname{ctg} 210^\circ}{\sin(-300^\circ) \cos^2 180^\circ}.$$

4. Спростіть вирази:

$$1) \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\operatorname{ctg}(2\pi + \alpha) \cdot \sin(\pi + \alpha)};$$

$$2) \frac{\sin^2(\pi + \alpha) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right).$$

5. Спростіть вираз:

$$1) \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\operatorname{ctg}(2\pi - \alpha) \cdot \sin(\pi + \alpha)};$$

$$2) \frac{\sin^2(\pi + \alpha) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right).$$

6. Обчисліть:

$$1) \cos \frac{23\pi}{4} - \sin \frac{15\pi}{4} - \operatorname{ctg}\left(-\frac{11\pi}{2}\right);$$

$$2) \sin \frac{25\pi}{3} - \cos\left(-\frac{17\pi}{2}\right) - \operatorname{tg} \frac{10\pi}{3};$$

$$3) \sin(-7\pi) - 2 \cos \frac{31\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{7\pi}{4};$$

$$4) \cos(-9\pi) + 2 \sin\left(-\frac{49\pi}{6}\right) - \operatorname{ctg}\left(-\frac{21\pi}{4}\right).$$

7. Доведіть тотожність:

$$1) \sin\left(\frac{7\pi}{6} + \alpha\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right);$$

$$2) \sin\left(\frac{5\pi}{4} + \alpha\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right);$$

$$3) \cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right);$$

$$4) \cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right).$$

8. Зведіть до кута α , де $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$, та обчисліть:

$$1) \cos 750^\circ;$$

$$2) \sin 1140^\circ;$$

$$3) \operatorname{tg} 405^\circ;$$

$$4) \cos 840^\circ;$$

$$5) \sin \frac{47\pi}{6};$$

$$6) \operatorname{tg} \frac{25\pi}{4};$$

$$7) \operatorname{ctg} \frac{27\pi}{4};$$

$$8) \cos \frac{21\pi}{4}.$$

9. Доведіть тотожність:

$$1) \frac{\sin(\pi - \alpha) \cos(\pi + \alpha) \operatorname{tg}(\pi - \alpha)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = -1;$$

$$2) \sqrt{\sin^{-2}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) + \cos^{-2}\left(\alpha + \frac{5\pi}{2}\right)} = \frac{1}{|\sin \alpha \cos \alpha|}.$$

10. Знайдіть значення виразу:

$$1) \frac{\sin 148^\circ \cos 253^\circ - \sin 482^\circ \sin 613^\circ}{\cos 918^\circ \cos(-473^\circ) - \cos(-517^\circ) \cos 288^\circ};$$

$$2) \frac{\cos 246^\circ \cos 354^\circ - \cos 624^\circ \cos(-516^\circ)}{\cos 603^\circ \cos(-177^\circ) + \cos(-447^\circ) \cos 333^\circ}.$$

11. Спростіть вираз:

$$1) \frac{1 - \operatorname{tg}(90^\circ + x)}{1 + \operatorname{ctg}(-x)} - \frac{\operatorname{tg}(180^\circ + x) + 1}{\operatorname{ctg}(270^\circ - x) - 1};$$

$$2) \frac{\operatorname{tg}(1,5\pi - \alpha) + \operatorname{tg}^3(0,5\pi + \alpha)}{\operatorname{ctg}^3(2,5\pi - \alpha) + \operatorname{ctg}(1,5\pi + \alpha)}.$$

12. Обчисліть $\sin(\alpha - \beta) - 2 \cos \alpha \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right)$, якщо $\alpha + \beta = \frac{2\pi}{3}$.

Рівень С

1. Доведіть тотожність:

1) $\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(\pi - x)\right)^2 + \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos(2\pi - x)\right)^2 = 2;$

2) $\sin(2\pi - \varphi) \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right) - \cos(\varphi - \pi) - \sin(\varphi - \pi) = \sin \varphi.$

2. Обчисліть:

1) $\operatorname{tg}^2 \frac{11\pi}{3} + \operatorname{ctg}(-7,25\pi) + 4 \cos^2 \frac{31\pi}{6};$ 2) $\operatorname{tg} 1290^\circ + \cos 1470^\circ + \cos 1590^\circ.$

3. Відомо, що $\operatorname{ctg}(25^\circ - x) + \operatorname{ctg}(65^\circ + x) = 2$. Знайдіть значення виразу $\operatorname{ctg}^2(25^\circ - x) + \operatorname{ctg}^2(65^\circ + x)$.

4. Спростіть вираз:

1) $(\operatorname{ctg}(6,5\pi - \alpha) \cos(-\alpha) + \cos(\pi - \alpha))^2 + \frac{2 \sin^2(\pi - \alpha)}{\operatorname{tg}(\alpha - \pi)};$

2) $\left(\frac{\cos(2,5\pi + \alpha)}{\operatorname{ctg}(3\pi + \alpha)} - \sin(-\alpha) \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right)\right)^2 + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}.$

5. Обчисліть $\operatorname{ctg} 5^\circ \operatorname{ctg} 15^\circ \operatorname{ctg} 25^\circ \dots \operatorname{ctg} 75^\circ \operatorname{ctg} 85^\circ$.

6. Спростіть вираз $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} + x\right).$

7. **Творче завдання.** Напишіть програму, яка зводить обчислення значень тригонометричних функцій до невід'ємного кута, який не перевищує $\frac{\pi}{4}$.

Х. Рефлексія (1 хв)

1) Я сьогодні навчився/навчилась

.....
.....
.....

2) Мені здалося цікавим

.....
.....
.....

3) У мене залишилися запитання щодо

.....
.....
.....

Можливі теми проєктів

1. Геометричне обґрунтування формул зведення.
2. Використання формул зведення в задачах фізики.
3. Визначення фазового зсуву в електричних колах змінного струму.
4. Роль формул зведення у побудові тригонометричних таблиць.
5. Розробка настільної гри або квесту для вивчення формул зведення.







