

11

Тема 2. Співвідношення між тригонометричними функціями

Урок 6. **Формули зведення**

Тип уроку: урок засвоєння нових знань.

План уроку

1. Формули зведення для синуса.
2. Формули зведення для косинуса.
3. Формули зведення для тангенса.
4. Формули зведення для котангенса.
5. Загальні правила запису формул зведення.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

оцінює достовірність і доцільність використання даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 1.2.2–1 П];

аналізує спільні та відмінні риси різних моделей і шляхів розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1–1 П];

визначає та усуває прогалини у власних математичних знаннях і вміннях у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 4.1.3–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого. Завдання можна розв'язувати усно.
- 3) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні задачі. Обирайте ілюстративні задачі на власний розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.

6) Пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач і навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

7) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

8) Можливі теми для створення проєктів запропоновані.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Якщо тригонометричні таблиці складені для кутів від 0° до 90° , то чи можна за їхньою допомогою знаходити значення тригонометричних функцій інших кутів?

2) Чи допомагають формули зведення інженерам при виконанні обчислень?

3) Що легше, вивчити одне мнемонічне правило, чи запам'ятовувати десятки формул?

4) Чому при аналізі звукових коливань зручно використовувати кути від 0° до 90° ?

5) Чому в астрономії кути спостереження часто розглядають в діапазоні від 0° до 90° ?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Обчисліть $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $\cos \alpha = -\frac{24}{25}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Відповідь. $\frac{7}{24}$.

2. Спростіть вираз $\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos \alpha$.

Відповідь. $\sin \alpha$.

3. Обчисліть $\cos 71^\circ \cdot \cos 26^\circ + \sin 71^\circ \cdot \sin 26^\circ$.

Відповідь. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Знайдіть значення виразу $\frac{1 + \operatorname{tg} 67^\circ \cdot \operatorname{tg} 7^\circ}{\operatorname{tg} 67^\circ - \operatorname{tg} 7^\circ}$.

Відповідь. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

5. Знайдіть $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 2$.

Відповідь. $-\frac{1}{3}$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. На валу електродвигуна встановлено два датчики вібрації. Обидва фіксують гармонічні коливання, які потрапляють на датчики і задаються формулами: на першому датчику $x_1(t) = 2 \cos\left(0,2t + \frac{\pi}{6}\right)$, а на другому — $x_2(t) = -2 \sin\left(0,2t - \frac{\pi}{9}\right)$. Запишіть коливання, яке реєструється другим датчиком у вигляді $x_2(t) = 2 \cos(0,2t + \varphi_2)$ та знайдіть різницю початкових фаз $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, де $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$.

Задача 2. Олімпіадна задача. Сума трьох додатних кутів дорівнює 90° . Чи може сума косинусів двох із них дорівнювати третьому?

III. Формули зведення для синуса

Формули зведення — це формули, за якими можна значення тригонометричних функцій будь-якого кута α , такого, що $0^\circ < \alpha < 360^\circ$, виразити через відповідні значення тригонометричних функцій гострого кута.

Усі формули зведення подано лише як довідниковий матеріал. Важливо сформулювати мнемонічне правило для розуміння формул.

У формулах зведення кут α — гострий кут, тобто $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

- 1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \frac{\pi}{2} \cos \alpha - \sin \alpha \cos \frac{\pi}{2} = \cos \alpha$.
- 2) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \frac{\pi}{2} \cos \alpha + \sin \alpha \cos \frac{\pi}{2} = \cos \alpha$.
- 3) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \frac{3\pi}{2} \cos \alpha - \sin \alpha \cos \frac{3\pi}{2} = -\cos \alpha$.
- 4) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \frac{3\pi}{2} \cos \alpha + \sin \alpha \cos \frac{3\pi}{2} = -\cos \alpha$.
- 5) $\sin(\pi - \alpha) = \sin \pi \cos \alpha - \sin \alpha \cos \pi = \sin \alpha$.
- 6) $\sin(\pi + \alpha) = \sin \pi \cos \alpha + \sin \alpha \cos \pi = -\sin \alpha$.
- 7) $\sin(2\pi - \alpha) = \sin 2\pi \cos \alpha - \sin \alpha \cos 2\pi = -\sin \alpha$.
- 8) $\sin(2\pi + \alpha) = \sin 2\pi \cos \alpha + \sin \alpha \cos 2\pi = \sin \alpha$.

Ілюстративні приклади

6. Обчисліть $\sin 870^\circ$.

Розв'язання. $\sin 870^\circ = \sin(2 \cdot 360^\circ + 150^\circ) = \sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = 0,5$.

Відповідь. 0,5.

7. Обчисліть $\sin \frac{15\pi}{4}$.

Розв'язання. $\sin \frac{15\pi}{4} = \sin \left(4\pi - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Відповідь. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

IV. Формули зведення для косинуса

1) $\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \alpha + \sin \alpha \sin \frac{\pi}{2} = \sin \alpha$.

2) $\cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \alpha - \sin \alpha \sin \frac{\pi}{2} = -\sin \alpha$.

3) $\cos(\pi - \alpha) = \cos \pi \cos \alpha + \cos \alpha \cos \pi = -\cos \alpha$.

4) $\cos(\pi + \alpha) = \cos \pi \cos \alpha + \cos \alpha \cos \pi = -\cos \alpha$.

5) $\cos \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \frac{3\pi}{2} \cos \alpha + \sin \alpha \sin \frac{3\pi}{2} = -\sin \alpha$.

6) $\cos \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) = \cos \frac{3\pi}{2} \cos \alpha - \sin \alpha \sin \frac{3\pi}{2} = \sin \alpha$.

7) $\cos(2\pi - \alpha) = \cos 2\pi \cos \alpha + \cos \alpha \cos 2\pi = \cos \alpha$.

8) $\cos(2\pi + \alpha) = \cos 2\pi \cos \alpha + \cos \alpha \cos 2\pi = \cos \alpha$.

Ілюстративні приклади

8. Зведіть $\cos \frac{8\pi}{7}$ до значення тригонометричної функції найменшого додатного аргументу.

Розв'язання. $\cos \frac{8\pi}{7} = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{7} \right) = -\cos \frac{\pi}{7}$.

Відповідь. $-\cos \frac{\pi}{7}$.

9. Обчисліть значення виразу $\cos 5^\circ \cos 40^\circ - \cos 85^\circ \cos 50^\circ$.

Розв'язання. $\cos 5^\circ \cos 40^\circ - \cos 85^\circ \cos 50^\circ =$
 $= \cos 5^\circ \cos 40^\circ - \cos(90^\circ - 5^\circ) \cos(90^\circ - 40^\circ) =$

$= \cos 5^\circ \cos 40^\circ - \sin 5^\circ \sin 40^\circ = \cos(5^\circ + 40^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Відповідь. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

V. Формули зведення для тангенса

$$1) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$2) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

$$3) \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha.$$

$$4) \operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \frac{\sin(\pi + \alpha)}{\cos(\pi + \alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$$

$$5) \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{-\cos \alpha}{-\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$6) \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{-\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

$$7) \operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = \frac{\sin(2\pi - \alpha)}{\cos(2\pi - \alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha.$$

$$8) \operatorname{tg}(2\pi + \alpha) = \frac{\sin(2\pi + \alpha)}{\cos(2\pi + \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Ілюстративні приклади

- 10.** Зведіть $\operatorname{tg}(-325^\circ)$ до значення тригонометричної функції найменшого додатного аргументу.

Розв'язання. $\operatorname{tg}(-325^\circ) = -\operatorname{tg}(325^\circ) = -\operatorname{tg}(360^\circ - 35^\circ) = -(-\operatorname{tg} 35^\circ) = \operatorname{tg} 35^\circ.$

Відповідь. $\operatorname{tg} 35^\circ.$

- 11.** Доведіть тотожність $\frac{\operatorname{tg}(\pi - \alpha) \sin(1,5\pi + \alpha)}{\cos(\pi + \alpha) \operatorname{tg}(1,5\pi + \alpha)} = \operatorname{tg}^2 \alpha.$

Доведення. $\frac{\operatorname{tg}(\pi - \alpha) \sin(1,5\pi + \alpha)}{\cos(\pi + \alpha) \operatorname{tg}(1,5\pi + \alpha)} = \frac{-\operatorname{tg} \alpha (-\cos \alpha)}{-\cos \alpha (-\operatorname{ctg} \alpha)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}} = \operatorname{tg}^2 \alpha$, що й треба було до-

вести.

VI. Формули зведення для котангенса

$$1) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$$

$$2) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha.$$

$$3) \operatorname{ctg}(\pi-\alpha)=\frac{\cos(\pi-\alpha)}{\sin(\pi-\alpha)}=\frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

$$4) \operatorname{ctg}(\pi+\alpha)=\frac{\cos(\pi+\alpha)}{\sin(\pi+\alpha)}=\frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

$$5) \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$$

$$6) \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha.$$

$$7) \operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)=\frac{\cos(2\pi-\alpha)}{\sin(2\pi-\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

$$8) \operatorname{ctg}(2\pi+\alpha)=\frac{\cos(2\pi+\alpha)}{\sin(2\pi+\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Ілюстративні приклади

12. Спростіть вираз
$$\frac{\sin(\pi-\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}.$$

Розв'язання.
$$\frac{\sin(\pi-\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\sin\alpha-\sin\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}=-1.$$

Відповідь -1 .

13. Спростіть вираз $\frac{\operatorname{ctg}(\pi + \alpha)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$.

Розв'язання. $\frac{\operatorname{ctg}(\pi + \alpha)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{-\cos \alpha} = -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = -\frac{1}{\sin \alpha} = -\operatorname{cosec} \alpha.$

Відповідь. $-\operatorname{cosec} \alpha.$

VII. Загальні правила запису формул зведення

Зрозуміло, що запам'ятати 32 формули зведення непросто, тому існує мнемонічне правило, яке дозволяє користуватися формулами зведення, не завчаючи їх напам'ять.

1. У правій частині рівності ставлять той знак, який має ліва частина, за умови, що $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

2. Якщо в лівій частині формули аргумент має вигляд $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ або $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то синус міняють на косинус, тангенс — на котангенс, і навпаки. Якщо аргумент має вигляд $\pi \pm \alpha$ або $2\pi \pm \alpha$, то зміни функції не відбувається.

Наприклад, $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha.$

Якщо $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то кут $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ — кут III чверті, в якій синус — від'ємний.

Оскільки кут вигляду $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то синус міняємо на косинус.

Звідки $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha.$

Ілюстративні приклади

14. Спростіть вираз $\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) + \operatorname{ctg}(270^\circ - \alpha) + \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) + \operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha).$

Розв'язання. $\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) + \operatorname{ctg}(270^\circ - \alpha) + \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) + \operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) =$
 $-\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha = -2\operatorname{tg} \alpha.$

Відповідь. $-2\operatorname{tg} \alpha.$

15. Спростіть вираз $\frac{\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) \cos(180^\circ - \alpha) \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ + \alpha) \operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha)}.$

Розв'язання. $\frac{\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) \cos(180^\circ - \alpha) \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ + \alpha) \operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha)} = \frac{(-\operatorname{tg} \alpha)(-\cos \alpha) \operatorname{ctg} \alpha}{\cos \alpha (-\operatorname{tg} \alpha) (-\operatorname{ctg} \alpha)} = 1.$

Відповідь. 1.

VIII. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (7–8 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. На валу електродвигуна встановлено два датчики вібрації. Обидва фіксують гармонічні коливання, які потрапляють на датчики і задаються формулами: на першому датчику $x_1(t) = 2 \cos\left(0,2t + \frac{\pi}{6}\right)$, а на другому — $x_2(t) = -2 \sin\left(0,2t - \frac{\pi}{9}\right)$. Запишіть коливання, яке реєструється другим датчиком у вигляді $x_2(t) = 2 \cos(0,2t + \varphi_2)$ та знайдіть різницю початкових фаз $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, де $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$.

Розв'язання. $x_2(t) = -2 \sin\left(0,2t - \frac{\pi}{9}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{9} - 0,2t\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{9} - 0,2t\right)\right) =$
 $= 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{9} + 0,2t\right) = 2 \cos\left(0,2t + \frac{7\pi}{18}\right).$

Різниця фаз $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{7\pi}{18} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{18} = \frac{2\pi}{9}.$

Відповідь. $x_2(t) = 2 \cos\left(0,2t + \frac{7\pi}{18}\right), \Delta\varphi = \frac{2\pi}{9}.$

Задача 2. Олімпіадна задача. Сума трьох додатних кутів дорівнює 90° . Чи може сума косинусів двох із них дорівнювати третьому?

Розв'язання. Нехай α, β, γ — дані кути. Оскільки кути додатні і їхня сума дорівнює 90° , то кожен з них менший від 90° . Нехай $\gamma = 90^\circ - \alpha - \beta$.

Тоді $\cos \gamma = \cos(90^\circ - \alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta < \cos \beta + \cos \alpha.$

Отже, косинус жодного із даних кутів не може дорівнювати сумі косинусів двох інших кутів.

Відповідь. Не може.

IX. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Спростіть вираз:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right);$ 2) $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha);$ 3) $\operatorname{ctg}(270^\circ + \alpha);$

4) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right);$ 5) $\cos(\pi + \alpha);$ 6) $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha).$

2. Спростіть вираз:

1) $\frac{\sin(2\pi - \alpha) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos(2\pi + \alpha) \operatorname{tg}(\pi + \alpha)};$ 2) $\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \operatorname{tg}(\pi + \alpha) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos(\pi + \alpha)}.$

3. Обчисліть:

1) $\cos 240^\circ;$ 2) $\operatorname{tg} 225^\circ;$ 3) $\operatorname{ctg} 330^\circ;$ 4) $\sin 150^\circ.$

4. Зведіть вирази до значення тригонометричної функції найменшого додатного аргументу:

1) $\sin 216^\circ$; 2) $\cos 400^\circ$; 3) $\operatorname{ctg} 194^\circ$; 4) $\operatorname{tg}(-0,7\pi)$.

5. Обчисліть:

1) $\operatorname{ctg} \frac{11\pi}{6}$; 2) $\sin 1110^\circ$; 3) $\cos \frac{13\pi}{6}$; 4) $\operatorname{ctg}(-1200^\circ)$.

6. Спростіть вираз:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; 2) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;
3) $\sin(\pi + \alpha) - \operatorname{tg}(\pi - \alpha)$; 4) $\sin(270^\circ - \alpha) + \cos(270^\circ + \alpha)$.

Рівень В

1. Знайдіть гострий кут α , для якого виконується рівність:

1) $\cos 75^\circ = \cos(90^\circ - \alpha)$; 2) $\sin \frac{5}{4}\pi = \sin(\pi + \alpha)$;
3) $\sin 150^\circ = \sin(90^\circ + \alpha)$; 4) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{5} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;
5) $\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - \alpha)$; 6) $\cos \frac{7\pi}{4} = \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$;
7) $\cos 310^\circ = \cos(270^\circ + \alpha)$; 8) $\operatorname{ctg} \frac{11}{6}\pi = \operatorname{ctg}(2\pi - \alpha)$.

2. Спростіть вираз:

1) $\sin^2(\pi - x) + \operatorname{tg}^2(\pi - x) \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cos(x - 2\pi)$;
2) $\frac{\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) \cos(180^\circ - \alpha) \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ + \alpha) \operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha)}$.

3. Обчисліть:

1) $\frac{\sin^2 315^\circ \cos 300^\circ + \operatorname{tg}(-315^\circ)}{\sin(-120^\circ) \cos 150^\circ}$; 2) $\frac{6 \cos^2(-240^\circ) \operatorname{ctg} 210^\circ}{\sin(-300^\circ) \cos^2 180^\circ}$.

4. Спростіть вирази:

1) $\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\operatorname{ctg}(2\pi + \alpha)} \cdot \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin(\pi + \alpha)}$; 2) $\frac{\sin^2(\pi + \alpha) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

5. Спростіть вираз:

1) $\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\operatorname{ctg}(2\pi - \alpha)} \cdot \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin(\pi + \alpha)}$; 2) $\frac{\sin^2(\pi + \alpha) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

6. Обчисліть:

1) $\cos \frac{23\pi}{4} - \sin \frac{15\pi}{4} - \operatorname{ctg} \left(-\frac{11\pi}{2} \right);$

2) $\sin \frac{25\pi}{3} - \cos \left(-\frac{17\pi}{2} \right) - \operatorname{tg} \frac{10\pi}{3};$

3) $\sin(-7\pi) - 2\cos \frac{31\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{7\pi}{4};$

4) $\cos(-9\pi) + 2\sin \left(-\frac{49\pi}{6} \right) - \operatorname{ctg} \left(-\frac{21\pi}{4} \right).$

7. Доведіть тотожність:

1) $\sin \left(\frac{7\pi}{6} + \alpha \right) = -\sin \left(\frac{\pi}{6} + \alpha \right);$

2) $\sin \left(\frac{5\pi}{4} + \alpha \right) = -\sin \left(\frac{3\pi}{4} - \alpha \right);$

3) $\cos \left(\alpha - \frac{2\pi}{3} \right) = -\cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right);$

4) $\cos \left(\alpha - \frac{2\pi}{3} \right) = \cos \left(\alpha + \frac{4\pi}{3} \right).$

8. Зведіть до кута α , де $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$, та обчисліть:

1) $\cos 750^\circ;$

2) $\sin 1140^\circ;$

3) $\operatorname{tg} 405^\circ;$

4) $\cos 840^\circ;$

5) $\sin \frac{47\pi}{6};$

6) $\operatorname{tg} \frac{25\pi}{4};$

7) $\operatorname{ctg} \frac{27\pi}{4};$

8) $\cos \frac{21\pi}{4}.$

9. Доведіть тотожність:

1) $\frac{\sin(\pi - \alpha) \cos(\pi + \alpha) \operatorname{tg}(\pi - \alpha)}{\sin \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) \operatorname{ctg} \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)} = -1;$

2) $\sqrt{\sin^{-2} \left(\alpha - \frac{3\pi}{2} \right) + \cos^{-2} \left(\alpha + \frac{5\pi}{2} \right)} = \frac{1}{|\sin \alpha \cos \alpha|}.$

10. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{\sin 148^\circ \cos 253^\circ - \sin 482^\circ \sin 613^\circ}{\cos 918^\circ \cos(-473^\circ) - \cos(-517^\circ) \cos 288^\circ};$

2) $\frac{\cos 246^\circ \cos 354^\circ - \cos 624^\circ \cos(-516^\circ)}{\cos 603^\circ \cos(-177^\circ) + \cos(-447^\circ) \cos 333^\circ}.$

11. Спростіть вираз:

1) $\frac{1 - \operatorname{tg}(90^\circ + x)}{1 + \operatorname{ctg}(-x)} - \frac{\operatorname{tg}(180^\circ + x) + 1}{\operatorname{ctg}(270^\circ - x) - 1};$

2) $\frac{\operatorname{tg}(1,5\pi - \alpha) + \operatorname{tg}^3(0,5\pi + \alpha)}{\operatorname{ctg}^3(2,5\pi - \alpha) + \operatorname{ctg}(1,5\pi + \alpha)}.$

12. Обчисліть $\sin(\alpha - \beta) - 2\cos \alpha \cdot \cos \left(\frac{3\pi}{2} - \beta \right)$, якщо $\alpha + \beta = \frac{2\pi}{3}$.

Рівень С

1. Доведіть тотожність:

1) $\left(\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \sin(\pi - x) \right)^2 + \left(\cos \left(\frac{3\pi}{2} - x \right) + \cos(2\pi - x) \right)^2 = 2;$

2) $\sin(2\pi - \varphi) \operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{2} - \varphi \right) - \cos(\varphi - \pi) - \sin(\varphi - \pi) = \sin \varphi.$

2. Обчисліть:

1) $\operatorname{tg}^2 \frac{11\pi}{3} + \operatorname{ctg}(-7,25\pi) + 4\cos^2 \frac{31\pi}{6};$

2) $\operatorname{tg} 1290^\circ + \cos 1470^\circ + \cos 1590^\circ.$

- 3.** Відомо, що $\operatorname{ctg}(25^\circ - x) + \operatorname{ctg}(65^\circ + x) = 2$. Знайдіть значення виразу $\operatorname{ctg}^2(25^\circ - x) + \operatorname{ctg}^2(65^\circ + x)$.
- 4.** Спростіть вираз:
- 1) $(\operatorname{ctg}(6,5\pi - \alpha) \cos(-\alpha) + \cos(\pi - \alpha))^2 + \frac{2\sin^2(\pi - \alpha)}{\operatorname{tg}(\alpha - \pi)}$;
 - 2) $\left(\frac{\cos(2,5\pi + \alpha)}{\operatorname{ctg}(3\pi + \alpha)} - \sin(-\alpha) \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right) \right)^2 + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}$.
- 5.** Обчисліть $\operatorname{ctg} 5^\circ \operatorname{ctg} 15^\circ \operatorname{ctg} 25^\circ \dots \operatorname{ctg} 75^\circ \operatorname{ctg} 85^\circ$.
- 6.** Спростіть вираз $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$.
- 7. Творче завдання.** Напишіть програму, яка зводить обчислення значень тригонометричних функцій до невід'ємного кута, який не перевищує $\frac{\pi}{4}$.

Х. Рефлексія (1 хв)

- 1) Я сьогодні навчився/навчилась
- 2) Мені здалося цікавим
- 3) У мене залишилися запитання щодо

Можливі теми проєктів

- 1.** Геометричне обґрунтування формул зведення.
- 2.** Використання формул зведення в задачах фізики.
- 3.** Визначення фазового зсуву в електричних колах змінного струму.
- 4.** Роль формул зведення у побудові тригонометричних таблиць.
- 5.** Розробка настільної гри або квесту для вивчення формул зведення.