

Тема 2.

Співвідношення між тригонометричними функціями

Урок 7. Урок–практикум. Застосування формул зведення

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) використовувати формули зведення для обчислення значень тригонометричних функцій;
- 2) використовувати формули зведення для спрощення і перетворення виразів;
- 3) використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Обчисліть: $\cos 840^\circ$.
2. Знайдіть головний період функції $y = \operatorname{tg} 4x$.
3. Зведіть функцію $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$.
4. Спростіть вираз $\operatorname{tg} \alpha (1 - \sin^2 \alpha)$.
5. Обчисліть: $8 \sin^2 20^\circ + 8 \sin^2 70^\circ$.

III. Обчислення значень тригонометричних функцій з використанням формул зведення

Повторити формули зведення можна за допомогою таблиці.

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$\pi + \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$\pi - \alpha$	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
$2\pi + \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$2\pi - \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$

Також доцільно нагадати мнемонічне правило.

1. У правій частині рівності ставлять такий знак, який має ліва частина, за умови, що $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
2. Якщо в лівій частині формули аргумент має вигляд $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ або $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то синус міняють на косинус, тангенс — на котангенс, і навпаки. Якщо аргумент має вигляд $\pi \pm \alpha$ або $2\pi \pm \alpha$, то зміни функції не відбувається.

Приклад 1. Зведіть $\operatorname{tg}(-325^\circ)$ до значення тригонометричної функції найменшого додатного аргументу.

Розв'язання. $\operatorname{tg}(-325^\circ) = -\operatorname{tg}(325^\circ) = -\operatorname{tg}(360^\circ - 35^\circ) = -(-\operatorname{tg} 35^\circ) = \operatorname{tg} 35^\circ$.

Відповідь. $\operatorname{tg} 35^\circ$.

V. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Інженер отримав з акселерометра сигнал вертикальних коливань платформи. Через некоректні налаштування програмного забезпечення сигнал записався у формі $x(t) = -6 \cos\left(\frac{\pi}{8} - 10t\right)$. Зведіть отримане гармонічне коливання до стандартного вигляду із найменшою можливою невід'ємною початковою фазою. Також укажіть амплітуду, циклічну частоту та період цього коливання.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Обчисліть:

1) $\operatorname{ctg} \frac{11\pi}{6}$; 2) $\cos \frac{13\pi}{6}$; 3) $\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$; 4) $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$.

2. Обчисліть:

1) $\cos(-150^\circ)$; 2) $\operatorname{ctg} 300^\circ$; 3) $\sin 240^\circ$; 4) $\operatorname{tg} 210^\circ$.

3. Спростіть вираз:

1) $\sin(\pi + \alpha) - \operatorname{tg}(\pi - \alpha)$; 2) $\sin(270^\circ - \alpha) + \cos(270^\circ + \alpha)$;
3) $\operatorname{tg}(\alpha - 360^\circ) - \operatorname{ctg}(270^\circ - \alpha)$; 4) $\sin(\pi + 1) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$.

4. Обчисліть:

1) $3\cos 3660^\circ + \sin(-1560^\circ) + \cos(-450^\circ)$;
2) $\cos 4455^\circ - \cos(-945^\circ) + \operatorname{tg} 1035^\circ - \operatorname{ctg}(-1500^\circ)$.

5. Зведіть тригонометричну функцію до функції додатного кута, меншого від $\frac{\pi}{4}$:

1) $\operatorname{tg} 174^\circ$; 2) $\sin 1,2\pi$; 3) $\cos \frac{5\pi}{6}$; 4) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

6. Спростіть вираз:

1) $\sin(90^\circ - \alpha) + \cos(180^\circ + \alpha) + \operatorname{tg}(270^\circ + \alpha) + \operatorname{ctg}(360^\circ + \alpha)$;
2) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) - \cos(\pi - t) + \operatorname{tg}(\pi - t) + \operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2} - t\right)$.

Рівень В

1. Спростіть вираз:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos(\pi + \alpha) + \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \operatorname{ctg}(2\pi - \alpha)$;
2) $\sin(90^\circ + \alpha) \cdot \sin(180^\circ - \alpha)(\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) + \operatorname{tg}(270^\circ - \alpha))$;

$$3) \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - \sin^2(\alpha - \pi) \sin^2(\alpha + \pi) - \cos^2(\alpha + \pi) \cos^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right);$$

$$4) \sin^2(\pi - x) + \operatorname{tg}^2(\pi - x) \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cos(x - 2\pi).$$

2. Обчисліть:

$$1) 3 \operatorname{ctg} 135^\circ + 2 \cos 120^\circ + \operatorname{tg} 420^\circ + 2 \sin 330^\circ;$$

$$2) 2 \sin 210^\circ + \operatorname{tg} 240^\circ + \operatorname{ctg} 120^\circ + \cos 450^\circ.$$

3. Обчисліть:

$$1) \operatorname{ctg} 1^\circ \cdot \operatorname{ctg} 3^\circ \cdot \operatorname{ctg} 5^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{ctg} 89^\circ;$$

$$2) \operatorname{tg} 88^\circ \cdot \operatorname{tg} 86^\circ \cdot \operatorname{tg} 84^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 2^\circ.$$

4. Обчисліть:

$$1) \frac{\sin 150^\circ - \cos 240^\circ}{\operatorname{ctg} 730^\circ \operatorname{ctg} 800^\circ + \operatorname{tg} 730^\circ \operatorname{tg} 800^\circ};$$

$$2) \sin 750^\circ \sin 150^\circ + \cos 930^\circ \cos(-870^\circ) + \operatorname{tg} 600^\circ.$$

5. Спростіть вираз:

$$1) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \sin \alpha + \sin^2(3\pi + \alpha) + \operatorname{tg}(5\pi + \alpha) \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$2) \cos(3\pi - \beta) + \operatorname{ctg}(3,5\pi - \beta) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \beta\right) \operatorname{ctg}(\pi + \beta).$$

6. Знайдіть значення виразу:

$$1) \cos \frac{16\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{7\pi}{6} - \operatorname{ctg} 3,5\pi - \sin \frac{13\pi}{6};$$

$$2) \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{4\pi}{9} + \dots + \cos \pi.$$

7. Спростіть вираз:

$$1) \frac{1 - \operatorname{tg}(90^\circ + x)}{1 + \operatorname{ctg}(-x)} - \frac{\operatorname{tg}(180^\circ + x) + 1}{\operatorname{ctg}(270^\circ - x) - 1}; \quad 2) \frac{\operatorname{tg}(1,5\pi - \alpha) + \operatorname{tg}^3(0,5\pi + \alpha)}{\operatorname{ctg}^3(2,5\pi - \alpha) + \operatorname{ctg}(1,5\pi + \alpha)}.$$

8. Відомо, що α , β і γ — кути трикутника ABC . Знайдіть $\operatorname{tg} \beta$, якщо $\sin \alpha = 0,6$, а $\cos \gamma = \frac{5}{13}$.

9. Обчисліть:

$$1) 8 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{2\pi}{3} \operatorname{tg} \frac{7\pi}{4};$$

$$2) 10 \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} \sin \frac{5\pi}{4} \cos \frac{7\pi}{4}.$$

10. Спростіть вираз:

$$1) \frac{\sin^8(\alpha - 270^\circ) \cos(360^\circ - \alpha)}{\operatorname{tg}^9(\alpha - 90^\circ) \cos^3(\alpha - 270^\circ)};$$

$$2) \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + y\right)}{\cos(\pi - x) \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - y\right)} - \frac{\sin\left(\frac{7\pi}{2} - y\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2} + x\right)}{\cos(2\pi - y) \operatorname{tg}(11\pi - x)}.$$

11. Обчисліть:

$$1) \frac{\operatorname{tg} 380^{\circ} + \operatorname{tg} 25^{\circ}}{\operatorname{tg} 225^{\circ} + \operatorname{ctg} 290^{\circ} \operatorname{ctg} 65^{\circ}}; \quad 2) \frac{\operatorname{tg} \frac{19\pi}{36} - \operatorname{tg} \frac{7\pi}{36}}{\sqrt{3} \operatorname{ctg} \frac{7\pi}{3} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{36} \operatorname{ctg} \frac{11\pi}{36}}.$$

12. Доведіть рівність:

$$1) \frac{\sin 50^{\circ} + \cos 50^{\circ}}{\sqrt{2} \sin 85^{\circ}} = 1; \quad 2) \frac{\cos 40^{\circ} - \sqrt{3} \sin 40^{\circ}}{\sin 190^{\circ}} = 2.$$

Рівень С

1. Обчисліть:

$$1) \sin 0^{\circ} + \sin 1^{\circ} + \sin 2^{\circ} + \dots + \sin 359^{\circ} + \sin 360^{\circ};$$
$$2) \operatorname{ctg} 15^{\circ} + \operatorname{ctg} 30^{\circ} + \operatorname{ctg} 45^{\circ} + \dots + \operatorname{ctg} 165^{\circ};$$
$$3) \sin 110^{\circ} + \sin 130^{\circ} + \sin 150^{\circ} + \dots + \sin 230^{\circ} + \sin 250^{\circ} + \sin 270^{\circ};$$
$$4) \operatorname{tg} 10^{\circ} \operatorname{tg} 20^{\circ} \operatorname{tg} 30^{\circ} \operatorname{tg} 40^{\circ} \dots \operatorname{tg} 70^{\circ} \operatorname{tg} 80^{\circ}.$$

2. Спростіть вираз:

$$1) \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}(\pi + \alpha);$$
$$2) \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right).$$

3. Відомо, що $\cos(45^{\circ} + \alpha) + \cos(45^{\circ} - \alpha) = m$. Знайдіть:

$$1) \cos^2(45^{\circ} + \alpha) + \cos^2(45^{\circ} - \alpha); \quad 2) \cos(45^{\circ} + \alpha) - \cos(45^{\circ} - \alpha).$$

4. Обчисліть $\frac{\cos 243^{\circ} \cos 183^{\circ} - \cos(-273^{\circ}) \cos(-387^{\circ})}{\cos 132^{\circ} \cos(-108^{\circ}) + \cos(-318^{\circ}) \cos 738^{\circ}} - \frac{\sin 18^{\circ} \cos 6^{\circ} + \sin 72^{\circ} \cos 84^{\circ}}{0,5\sqrt{3} \cos 6^{\circ} + 0,5 \sin 184^{\circ}}.$

5. Спростіть вираз:

$$1) \frac{\sin(180^{\circ} - 2x + y) + \cos(270^{\circ} + 2x + y) - \cos(1,5\pi - 2x)}{-\cos(3\pi + 2x + y) - \sin(2x - y - 0,5\pi) - \sin(1,5\pi + 2x)};$$
$$2) \frac{(\sin^2(3,5\pi - \alpha) - \sin^2(3\pi + \alpha)) \operatorname{ctg}^2\left(\frac{13\pi}{2} + \alpha\right)}{\operatorname{tg}^2(1,5\pi + \alpha) - \operatorname{tg}^2(\pi - \alpha)}.$$

6. Обчисліть:

$$1) \left(\sin \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{5\pi}{9}\right) \left(\sin \frac{13\pi}{9} - \sin \frac{19\pi}{12}\right) - \left(\sin \frac{11\pi}{12} + \sin \frac{19\pi}{18}\right) \left(\cos \frac{17\pi}{12} - \cos \frac{14\pi}{9}\right);$$
$$2) \operatorname{tg} 65^{\circ} \operatorname{ctg} 55^{\circ} - \operatorname{tg} 65^{\circ} \operatorname{ctg} 80^{\circ} - \operatorname{ctg} 55^{\circ} \operatorname{ctg} 80^{\circ}.$$

7. Творче завдання. Напишіть програму, яка візуалізує геометричний зміст формул зведення.

Рефлексія

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
.....
.....
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
.....
.....
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
.....
.....
- 4) Найскладнішим для мене було
.....
.....
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
.....
.....
- 6) Найбільше мені сподобалося
.....
.....

Можливі теми проєктів

- 1.** Оптимізація алгоритмів обчислення значень тригонометричних функцій у програмуванні.
- 2.** Формули зведення у фізиці коливань.
- 3.** Формули зведення в астрономії.
- 4.** Створення навчального застосунку для вивчення формул зведення.
- 5.** Застосування формул зведення в авіації.







