

Тема 2.

Співвідношення між тригонометричними функціями

Урок 9. Формули подвійного, потрійного та половинного аргументів

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви вивчите:

- 1) формули подвійного аргументу;
- 2) формули пониження степеня;
- 3) формули половинного аргументу;
- 4) формули потрійного аргументу;
- 5) формули вираження синуса та косинуса кута через тангенс половинного кута.

II. Повторення

1. Порівняйте $2\sin 30^\circ$ та $\sin 60^\circ$.
2. Знайдіть $\cos 15^\circ$.
3. Спростіть вираз $2 \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.
4. Обчисліть $\sin^2 48^\circ + \sin^2 42^\circ$.
5. $\cos(\alpha + 2\beta) = \dots$

IV. Формули пониження степеня

Якщо $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$, то $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$.

Якщо $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$, то $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$.

Знайдені формули називають **формулами пониження степеня**.

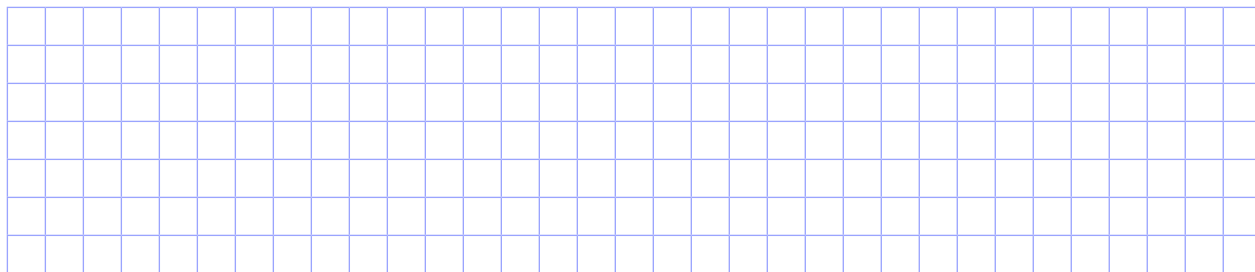
Формули пониження степеня

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2},$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2},$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}.$$

Приклад 4. Використайте формулу пониження степеня для виразу $\sin^2\left(\frac{x}{2} - 10^\circ\right)$.



V. Формули половинного аргументу

Запишемо формули пониження степеня для кута $\frac{\alpha}{2}$ і отримаємо формули половинного аргументу:

1) $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$, звідки $\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$;

2) $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$, звідки $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$;

3) $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$, звідки $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$.

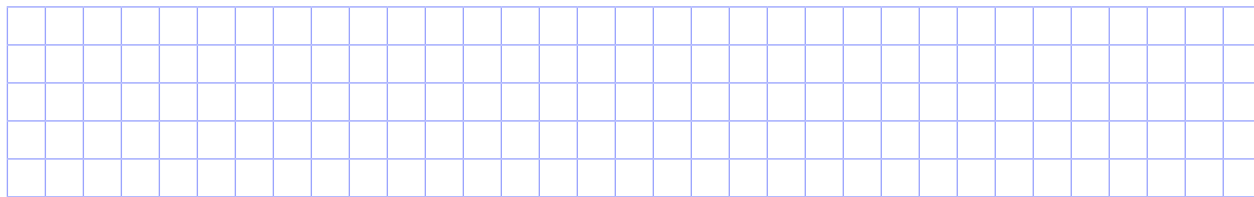
Формули половинного аргументу

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}},$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}.$$

Приклад 5. Обчисліть $\sin \frac{\pi}{8}$ і $\cos \frac{\pi}{8}$.



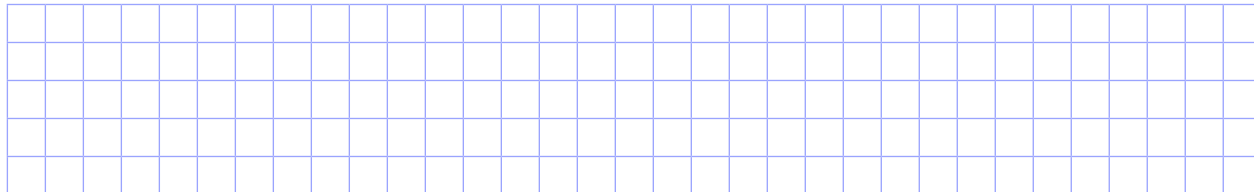
VI. Формули потрійного аргументу

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha \cos \alpha + (1 - 2\sin^2 \alpha) \sin \alpha = \\ &= 2\sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin \alpha - 2\sin^3 \alpha = 2\sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha - 2\sin^3 \alpha = \\ &= 2\sin \alpha - 2\sin^3 \alpha + \sin \alpha - 2\sin^3 \alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha. \\ \cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha = (2\cos^2 \alpha - 1) \cos \alpha - 2\cos \alpha \sin \alpha \sin \alpha = \\ &= 2\cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2\cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) = 2\cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2\cos \alpha + 2\cos^3 \alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha.\end{aligned}$$

Формули потрійного аргументу

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha, \\ \cos 3\alpha &= 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha.\end{aligned}$$

Приклад 6. Спростіть вираз $\frac{\sin^3 \alpha + \sin 3\alpha}{\cos^3 \alpha - \cos 3\alpha}$.



VII. Вираження синуса та косинуса кута через тангенс половинного кута

Запишемо за формулою половинного аргументу: $\sin \alpha = \frac{2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}}.$

Якщо $\cos \frac{\alpha}{2} \neq 0$, то поділимо чисельник і знаменник на $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$:

$$\sin \alpha = \frac{\frac{2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}}{\frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Запишемо за формулою половинного аргументу: $\cos \alpha = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$.

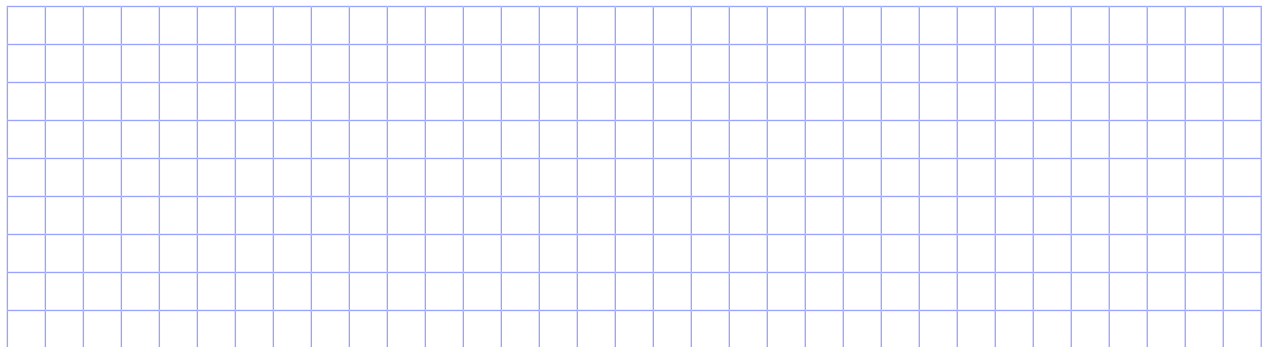
Якщо $\cos^2 \frac{\alpha}{2} \neq 0$, то поділимо чисельник і знаменник на $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$:

$$\cos \alpha = \frac{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}}{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Виразення синуса та косинуса кута через тангенс половинного кута:

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

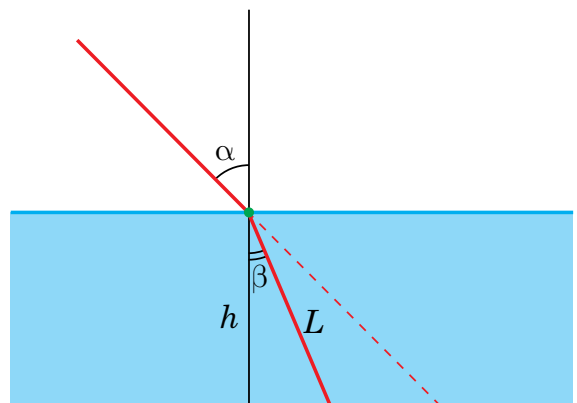
Приклад 7. Дано: $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 4$. Знайдіть $\sin \alpha + \cos \alpha$.



VIII. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Гідролог досліджує дно озера. Для цього він використовує лазерний далекомір, який спрямовує таким чином, щоб кут падіння був удвічі більший за кут заломлення (див. рисунок). Далекимір показує значення $L = 10$ м. Визначте глибину озера h , якщо коефіцієнт заломлення можна обчислити за формулою $n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$, де α — кут падіння променя, β — кут заломлення променя. Для води коефіцієнт заломлення світла дорівнює 1,333.



ІХ. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Спростіть вираз:

1) $\frac{1 + \sin 2\alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}$; 2) $\sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$.

2. Обчисліть $\sin 2\alpha$ і $\cos 2\alpha$, якщо $\cos \alpha = \frac{7}{25}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

3. Обчисліть $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ і $\operatorname{tg} 2\alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$.

4. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{\frac{1 + \cos 6}{2}} - 3 + 2 \cos^2 1,5$; 2) $2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} + \cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ$.

5. Понизьте степінь виразу:

1) $\sin^2 5\alpha$; 2) $\cos^2 12x$.

6. Обчисліть:

1) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}}{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}$; 2) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12}}$.

Рівень В

1. Обчисліть:

1) $\frac{\sin 25^\circ \cdot \sin 65^\circ}{\cos 40^\circ}$; 2) $(\cos^2 10^\circ - \cos^2 80^\circ)^2 + \cos^2 70^\circ$.

2. Спростіть вираз:

1) $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$; 2) $\frac{1 - \cos 4x}{2 \sin 2x}$; 3) $\frac{1 + \cos 2\beta}{1 - \cos 2\beta}$; 4) $\frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha}$.

3. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:

1) $3 \sin^2 \alpha + \cos 2\alpha$; 2) $\cos^2 \beta - 2 \cos 2\beta$.

4. Доведіть тотожність:

1) $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \cos \alpha - \sin 2\alpha} \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \operatorname{tg}^3 \alpha$; 2) $\frac{\cos 4\alpha}{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha} + \sin 2\alpha = \cos 2\alpha$.

5. Спростіть вираз:

1) $\frac{\sin^2 2\alpha - 4 \cos^2 \alpha}{\sin^2 2\alpha + 4 \cos^2 \alpha - 4}$; 2) $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \cdot \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{1 + \cos \frac{\alpha}{2}}$.

6. Дано: $\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} = 2,2$. Знайдіть $\sin 2\alpha$ і $\cos 2\alpha$.

7. Відомо, що $\operatorname{ctg} \alpha = 2$. Знайдіть $\sin 4\alpha$ і $\cos 4\alpha$.

8. Доведіть тотожність:

1) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$. 2) $4 \sin^4 \alpha + \sin^2 2\alpha = 4 \sin^2 \alpha$.

9. Доведіть тотожність $\frac{\cos 9\alpha - \cos^3 3\alpha}{\sin 9\alpha + \sin^3 3\alpha} = -\operatorname{tg} 3\alpha$.
10. Відомо, що $\sin \alpha = -0,6$ і $\alpha \in (3,5\pi; 4\pi)$. Знайдіть: $\sin 2\alpha, \operatorname{tg} 3\alpha, \cos 4\alpha$.
11. Доведіть тотожність $1 + \cos(3\pi + 3\alpha) \cos 2\alpha - \cos(1,5\pi - 3\alpha) \sin 2\alpha = 2 \sin^2 2,5\alpha$.
12. Скоротіть дробовий вираз $\frac{4 \cos^2 2\alpha - 4 \cos^2 \alpha + 3 \sin^2 \alpha}{4 \cos^2 \left(\frac{5\pi}{2} - \alpha \right) - \sin^2 2(\alpha - \pi)}$.

Рівень С

1. Обчисліть:
- 1) $4 \sin^3 \frac{5\pi}{18} - 3 \cos \frac{2\pi}{9} + \frac{3 \operatorname{tg} 15^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ}$; 2) $\cos 12^\circ \cos 72^\circ \sin 42^\circ$.
2. Обчисліть:
- 1) $8 \sin^2 \frac{15\pi}{16} \cdot \cos^2 \frac{17\pi}{16} - 1$; 2) $\sin^4 \frac{23\pi}{12} - \cos^4 \frac{13\pi}{12}$.
3. Спростіть вираз:
- 1) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \cos 4\alpha}}$, якщо $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$;
- 2) $\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \beta}}$, якщо $2\pi \leq \beta \leq 4\pi$.
4. Обчисліть:
- 1) $\sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$;
- 2) $\sin^6 \frac{\pi}{12} + \cos^6 \frac{5\pi}{12} + \sin^6 \frac{7\pi}{12} + \cos^6 \frac{11\pi}{12}$.
5. Спростіть вираз $\cos^2 \left(\frac{3\pi}{8} - \frac{x}{4} \right) - \sin^2 \left(\frac{15\pi}{8} + \frac{x}{4} \right)$.
6. Знайдіть $\cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\beta}{2}$, якщо відомо, що β — гострий кут і $\sin 2\beta = 0,4$.
7. **Творче завдання.** Створіть чат-бот, який запитує в користувача величину кута (в радіанах) і обчислює значення тригонометричних функцій подвійних, потрійних та половинних кутів.

Рефлексія

1. Я знаю формули подвійного аргументу.
- | | | |
|-----|------------------------|----|
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
|-----|------------------------|----|
2. Я знаю формули пониження степеня.
- | | | |
|-----|------------------------|----|
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
|-----|------------------------|----|
3. Я знаю формули половинного аргументу.
- | | | |
|-----|------------------------|----|
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
|-----|------------------------|----|

- | | | | | |
|-----------|--|-----|------------------------|----|
| 4. | Я знаю формули потрібного аргументу. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я знаю формули вираження синуса та косинуса кута через тангенс половинного кута. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

- 1.** Практичне застосування формул подвійного та половинного аргументів в інженерії та у фізиці.
- 2.** Геометрична інтерпретація формул подвійного й половинного аргументів.
- 3.** Використання формул подвійного кута в навігації та в астрономії.
- 4.** Створення мнемонічних правил для запам'ятовування формул тригонометрії.
- 5.** Розробка тренажера для запам'ятовування формул подвійного, потрібного та половинного аргументів і наслідків із них.







