

11

Тема 2. Співвідношення між тригонометричними функціями

Урок 9. **Формули подвійного, потрійного та половинного аргументів**

Тип уроку: урок засвоєння нових знань.

План уроку

1. Формули подвійного аргументу.
2. Формули пониження степеня.
3. Формули половинного аргументу.
4. Формули потрійного аргументу.
5. Вираження синуса та косинуса через тангенс половинного аргументу.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

виявляє ініціативу, пропонує та обґрунтовує ідеї щодо способу розв'язання специфічних проблемних ситуацій [12 МАО 2.2.1–1 П];

обирає математичну модель розв'язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов [12 МАО 3.2.2–1 П];

реалізовує визначену послідовність дій для розв'язання специфічних проблемних ситуацій, перевіряє та досліджує отримані результати [12 МАО 4.2.1–2 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.

- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.
- 6) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.
- 7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.
- 9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівень В або рівень С.
- 10) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Якщо аргумент тригонометричної збільшити вдвічі, то як зміниться значення тригонометричної функції?
- 2) Чи має практичне застосування в розрахунках подвоєння кута або поділ кута навпіл?
- 3) Що змінюється у функції $y = \sin 2x$ у порівнянні з функцією $y = \sin x$?
- 4) Чи можна змодельовати життєву ситуацію, за якої потрібно подвоїти кут або поділити кут навпіл?
- 5) Чи можна навести приклад, де рух або форма ґрунтується на подвоєнні кута або поділі кута навпіл?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Порівняйте $2\sin 30^\circ$ та $\sin 60^\circ$.
Відповідь. $2\sin 30^\circ > \sin 60^\circ$.
2. Знайдіть $\cos 15^\circ$.
Відповідь. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

3. Спростіть вираз $2 \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

Відповідь. $\frac{1}{2}$.

4. Обчисліть $\sin^2 48^\circ + \sin^2 42^\circ$.

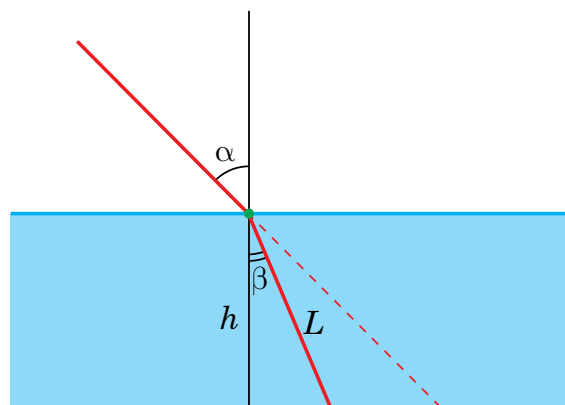
Відповідь. 1.

5. $\cos(\alpha + 2\beta) = \dots$

Відповідь. $\cos \alpha \cos 2\beta - \sin \alpha \sin 2\beta$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Гідроолог досліджує дно озера. Для цього він використовує лазерний далекомір, який спрямовує таким чином, щоб кут падіння був удвічі більший за кут заломлення (див. рисунок). Далекимір показує значення $L = 10$ м. Визначте глибину озера h , якщо коефіцієнт заломлення можна обчислити за формулою $n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$, де α — кут падіння променя, β — кут заломлення променя. Для води коефіцієнт заломлення світла дорівнює 1,333.



III. Формули подвійного аргументу

Розглянемо формули (теореми) додавання кутів тригонометричних функцій:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

У формулах покладемо, що $\beta = \alpha$, отримаємо:

1) $\cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$;

2) $\sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$;

3) $\operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

Таким чином, доведено **формули подвійного аргументу**:

1) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$;

2) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$;

3) $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

Із першої формули можна отримати ще дві важливі формули, якщо використати основну тригонометричну тотожність:

1) $\cos 2\alpha = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$.

2) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$.

Ілюстративні приклади

6. Спростіть вираз $\frac{\sin 2\alpha}{2\cos \alpha}$.

Розв'язання.

$$\frac{\sin 2\alpha}{2\cos \alpha} = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{2\cos \alpha} = \sin \alpha.$$

Відповідь. $\sin \alpha$.

7. Спростіть вираз $\frac{\cos \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2}}$.

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання. } \frac{\cos \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2}} &= \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2}} = \\ &= -\left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}\right). \end{aligned}$$

Відповідь. $-\left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}\right)$.

8. Виразіть вираз $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$ через функцію вдвічі меншого аргументу.

$$\text{Розв'язання. } \frac{\pi}{3} - \alpha = 2 \cdot \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right), \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

9. Обчисліть $\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}}$.

$$\text{Розв'язання. } \frac{1}{2} \cdot \frac{2\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}.$$

Відповідь. $\frac{1}{2}$.

IV. Формули пониження степеня

Якщо $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$, то $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$.

Якщо $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$, то $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$.

Знайдені формули називають **формулами пониження степеня**.

Формули пониження степеня

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2},$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2},$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}.$$

Ілюстративні приклади (5 хв)

- 10.** Використайте формулу пониження степеня для виразу $\sin^2\left(\frac{x}{2} - 10^\circ\right)$.

Розв'язання. $\sin^2\left(\frac{x}{2} - 10^\circ\right) = \frac{1 - \cos 2 \cdot \left(\frac{x}{2} - 10^\circ\right)}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos(x - 20^\circ)).$

Відповідь. $\frac{1}{2}(1 - \cos(x - 20^\circ)).$

- 11.** Спростіть вираз $\cos^2\left(\frac{5\pi}{4} - 2\alpha\right) - \cos^2\left(\frac{5\pi}{4} + 2\alpha\right)$.

Розв'язання. $\cos^2\left(\frac{5\pi}{4} - 2\alpha\right) - \cos^2\left(\frac{5\pi}{4} + 2\alpha\right) = \frac{1 + \cos\left(\frac{5\pi}{2} - 4\alpha\right)}{2} - \frac{1 + \cos\left(\frac{5\pi}{2} + 4\alpha\right)}{2} =$
 $= \frac{1 + \sin 4\alpha}{2} - \frac{1 - \sin 4\alpha}{2} = \frac{2 \sin 4\alpha}{2} = \sin 4\alpha.$

Відповідь. $\sin 4\alpha.$

V. Формули половинного аргументу

Запишемо формули пониження степеня для кута $\frac{\alpha}{2}$ і отримаємо формули половинного аргументу:

1) $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$, звідки $\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$;

2) $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$, звідки $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$;

3) $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$, звідки $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$.

Формули половинного аргументу

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}},$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}.$$

Ілюстративні приклади (5 хв)

12. Обчисліть $\sin \frac{\pi}{8}$ і $\cos \frac{\pi}{8}$.

Розв'язання. Оскільки, $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то:

$$1) \sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

$$2) \cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}.$$

Знак перед коренями «+», бо кут $\frac{\pi}{8}$ — гострий.

Відповідь. $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

13. Обчисліть $\sin \frac{\pi}{8}$ і $\cos \frac{\pi}{8}$.

Розв'язання. Оскільки, $\cos \frac{\pi}{4} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то

$$\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

Знак перед коренями «+», бо кут $\frac{\pi}{8}$ — гострий.

Відповідь. $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$, $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$.

14. Відомо, що $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, де $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$. Обчисліть $\cos \frac{\alpha}{2}$, $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Розв'язання. Знаходимо $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$.

Оскільки кут α і, відповідно, кут $\frac{\alpha}{2}$ — кути другої чверті, то $\cos \frac{\alpha}{2} < 0$, $\sin \frac{\alpha}{2} > 0$

і $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} < 0$.

Маємо: $\cos \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \left(-\frac{4}{5}\right)}{2}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)}{2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -3$.

Відповідь. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\frac{3\sqrt{10}}{10}$, -3 .

VI. Формули потрійного аргументу

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha \cos \alpha + (1 - 2\sin^2 \alpha) \sin \alpha = \\ &= 2\sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin \alpha - 2\sin^3 \alpha = 2\sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha - 2\sin^3 \alpha = \\ &= 2\sin \alpha - 2\sin^3 \alpha + \sin \alpha - 2\sin^3 \alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha = (2\cos^2 \alpha - 1) \cos \alpha - 2\cos \alpha \sin \alpha \sin \alpha = \\ &= 2\cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2\cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) = 2\cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2\cos \alpha + 2\cos^3 \alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha.\end{aligned}$$

Формули потрійного аргументу

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha, \\ \cos 3\alpha &= 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha.\end{aligned}$$

Ілюстративний приклад

15. Спростіть вираз $\frac{\sin^3 \alpha + \sin 3\alpha}{\cos^3 \alpha - \cos 3\alpha}$.

$$\begin{aligned}\text{Розв'язання. } \frac{\sin^3 \alpha + \sin 3\alpha}{\cos^3 \alpha - \cos 3\alpha} &= \frac{\sin^3 \alpha + 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha - 4\cos^3 \alpha + 3\cos \alpha} = \frac{3\sin \alpha - 3\sin^3 \alpha}{3\cos \alpha - 3\cos^3 \alpha} = \\ &= \frac{3\sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha)}{3\cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha)} = \frac{\sin \alpha \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \sin^2 \alpha} = \operatorname{Atg} \alpha.\end{aligned}$$

Відповідь. $\operatorname{ctg} \alpha$.

VII. Вираження синуса та косинуса кута через тангенс половинного кута

$$\text{Запишемо за формулою половинного аргументу: } \sin \alpha = \frac{2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Якщо $\cos \frac{\alpha}{2} \neq 0$, то поділимо чисельник і знаменник на $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$:

$$\sin \alpha = \frac{\frac{2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}}{\frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\text{Запишемо за формулою половинного аргументу: } \cos \alpha = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Якщо $\cos \frac{\alpha}{2} \neq 0$, то поділимо чисельник і знаменник на $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$:

$$\cos \alpha = \frac{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}}{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Виразення синуса та косинуса кута через тангенс половинного кута:

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Ілюстративні приклади

16. Дано: $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 4$. Знайдіть $\sin \alpha + \cos \alpha$.

$$\text{Розв'язання. } \sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \cdot 4}{1 + 16} = \frac{8}{17}, \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - 16}{1 + 16} = -\frac{15}{17}.$$

$$\text{Тоді } \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{8}{17} + \left(-\frac{15}{17}\right) = -\frac{7}{17}.$$

$$\text{Відповідь. } -\frac{7}{17}.$$

17. Доведіть, що $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$.

Доведення. І спосіб. Розглянемо праву частину даної рівності:

$$\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1 - \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}}{\frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}}{\frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

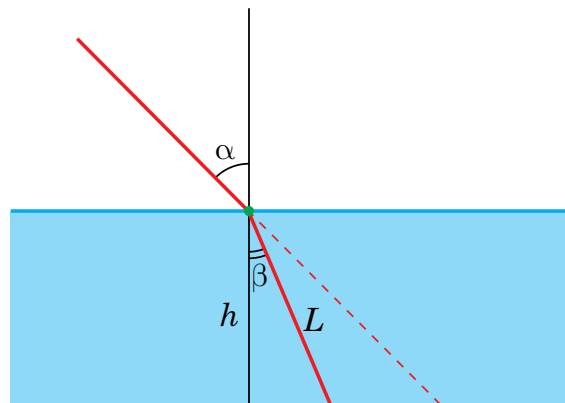
II спосіб. Розглянемо праву частину даної рівності:

$$\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

VIII. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Гідроолог досліджує дно озера. Для цього він використовує лазерний далекомір, який спрямовує таким чином, щоб кут падіння був удвічі більший за кут заломлення (див. рисунок). Далекимір показує значення $L = 10$ м. Визначте глибину озера h , якщо коефіцієнт заломлення можна обчислити за формулою $n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$, де α — кут



падіння променя, β — кут заломлення променя. Для води коефіцієнт заломлення світла дорівнює 1,333.

Розв'язання. 1) За умовою, $\alpha = 2\beta$, тоді $\frac{\sin 2\beta}{\sin \beta} = 1,333$,

$$\frac{2 \sin \beta \cos \beta}{\sin \beta} = 1,333, \cos \beta = 0,6665.$$

2) Оскільки $\cos \beta = \frac{h}{L}$, то $h = L \cos \beta$, $h = 10 \cdot 0,6665 = 6,665$ (м).

Отже, глибина озера становить 6,665 м.

Відповідь. 6,665 м.

IX. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Спростіть вираз:

1) $\frac{1 + \sin 2\alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}$; 2) $\sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$.

2. Обчисліть $\sin 2\alpha$ і $\cos 2\alpha$, якщо $\cos \alpha = \frac{7}{25}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

3. Обчисліть $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ і $\tan 2\alpha$, якщо $\tan \alpha = \frac{1}{3}$.

4. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{\frac{1 + \cos 6}{2}} - 3 + 2 \cos^2 1,5$; 2) $2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} + \cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ$.

5. Понизьте степінь виразу:

1) $\sin^2 5\alpha$; 2) $\cos^2 12x$.

6. Обчисліть:

1) $\frac{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}}{2 \tan \frac{\pi}{8}}$; 2) $\frac{1 - \tan^2 \frac{\pi}{12}}{1 + \tan^2 \frac{\pi}{12}}$.

Рівень В

1. Обчисліть:

1) $\frac{\sin 25^\circ \cdot \sin 65^\circ}{\cos 40^\circ}$; 2) $(\cos^2 10^\circ - \cos^2 80^\circ)^2 + \cos^2 70^\circ$.

2. Спростіть вираз:

1) $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$; 2) $\frac{1 - \cos 4x}{2 \sin 2x}$; 3) $\frac{1 + \cos 2\beta}{1 - \cos 2\beta}$; 4) $\frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha}$.

3. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:

1) $3 \sin^2 \alpha + \cos 2\alpha$; 2) $\cos^2 \beta - 2 \cos 2\beta$.

4. Доведіть тотожність:

1) $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \cos \alpha - \sin 2\alpha} \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \operatorname{tg}^3 \alpha$; 2) $\frac{\cos 4\alpha}{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha} + \sin 2\alpha = \cos 2\alpha$.

5. Спростіть вираз:

1) $\frac{\sin^2 2\alpha - 4 \cos^2 \alpha}{\sin^2 2\alpha + 4 \cos^2 \alpha - 4}$; 2) $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \cdot \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{1 + \cos \frac{\alpha}{2}}$.

6. Дано: $\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} = 2,2$. Знайдіть $\sin 2\alpha$ і $\cos 2\alpha$.

7. Відомо, що $\operatorname{ctg} \alpha = 2$. Знайдіть $\sin 4\alpha$ і $\cos 4\alpha$.

8. Доведіть тотожність:

1) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$. 2) $4 \sin^4 \alpha + \sin^2 2\alpha = 4 \sin^2 \alpha$.

9. Доведіть тотожність $\frac{\cos 9\alpha - \cos^3 3\alpha}{\sin 9\alpha + \sin^3 3\alpha} = -\operatorname{tg} 3\alpha$.

10. Відомо, що $\sin \alpha = -0,6$ і $\alpha \in (3,5\pi; 4\pi)$. Знайдіть: $\sin 2\alpha, \operatorname{tg} 3\alpha, \cos 4\alpha$.

11. Доведіть тотожність $1 + \cos(3\pi + 3\alpha) \cos 2\alpha - \cos(1,5\pi - 3\alpha) \sin 2\alpha = 2 \sin^2 2,5\alpha$.

12. Скоротіть дробовий вираз $\frac{4 \cos^2 2\alpha - 4 \cos^2 \alpha + 3 \sin^2 \alpha}{4 \cos^2 \left(\frac{5\pi}{2} - \alpha \right) - \sin^2 2(\alpha - \pi)}$.

Рівень С

1. Обчисліть:

1) $4 \sin^3 \frac{5\pi}{18} - 3 \cos \frac{2\pi}{9} + \frac{3 \operatorname{tg} 15^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ}$; 2) $\cos 12^\circ \cos 72^\circ \sin 42^\circ$.

2. Обчисліть:

1) $8 \sin^2 \frac{15\pi}{16} \cdot \cos^2 \frac{17\pi}{16} - 1$; 2) $\sin^4 \frac{23\pi}{12} - \cos^4 \frac{13\pi}{12}$.

3. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \cos 4\alpha}}$, якщо $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$;
2) $\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \beta}}$, якщо $2\pi \leq \beta \leq 4\pi$.

4. Обчисліть:

1) $\sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$;

2) $\sin^6 \frac{\pi}{12} + \cos^6 \frac{5\pi}{12} + \sin^6 \frac{7\pi}{12} + \cos^6 \frac{11\pi}{12}$.

5. Спростіть вираз $\cos^2 \left(\frac{3\pi}{8} - \frac{x}{4} \right) - \sin^2 \left(\frac{15\pi}{8} + \frac{x}{4} \right)$.

6. Знайдіть $\cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\beta}{2}$, якщо відомо, що β — гострий кут і $\sin 2\beta = 0,4$.

7. **Творче завдання.** Створіть чат-бот, який запитує в користувача величину кута (в радіанах) і обчислює значення тригонометричних функцій подвійних, потрібних та половинних кутів.

Х. Рефлексія (1–2 хв)

1. Я знаю формули подвійного аргументу.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

2. Я знаю формули пониження степеня.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

3. Я знаю формули половинного аргументу.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

4. Я знаю формули потрібного аргументу.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

5. Я знаю формули вираження синуса та косинуса кута через тангенс половинного кута.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

6. Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

Можливі теми проєктів

1. Практичне застосування формул подвійного та половинного аргументів в інженерії та у фізиці.

2. Геометрична інтерпретація формул подвійного й половинного аргументів.

3. Використання формул подвійного кута в навігації та в астрономії.

4. Створення мнемонічних правил для запам'ятовування формул тригонометрії.

5. Розробка тренажера для запам'ятовування формул подвійного, потрібного та половинного аргументів і наслідків із них.