

Тема 3.

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 1. Рівняння $\cos x = a$

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) вивчите означення найпростіших тригонометричних рівнянь;
- 2) розглянете графічний метод розв'язування рівняння $\cos x = a$;
- 3) вивчите формули для розв'язування рівняння $\cos x = a$, якщо $a = 1$, $a = -1$, $a = 0$;
- 4) дізнаєтесь означення арккосинуса;
- 5) вивчите загальну формулу коренів рівняння $\cos x = a$;
- 6) навчитесь використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Обчисліть значення виразу $\cos 39^\circ \cos 21^\circ - \sin 39^\circ \sin 21^\circ$.
2. Укажіть головний період функції $y = \sin \frac{2}{3}x$.
3. Обчисліть $\frac{2 \operatorname{tg} 15^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ}$.
4. Спростіть вираз $\frac{\sin 5\alpha - \sin \alpha}{\cos 3\alpha}$.
5. Спростіть вираз $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(\pi - \alpha)$.

II. Означення найпростіших тригонометричних рівнянь

Означення. Тригонометричними рівняннями називають рівності, в яких змінна міститься *лише* під знаком тригонометричної функції.

Наприклад, рівняння $\cos 3x = \sin x$, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 11x\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - 5x\right) = 0$,

$\sin 3x + \sin 5x = \sin 4x$, $\operatorname{ctg} 2x = 6$ — тригонометричні, а рівняння $\sin x = \frac{1}{2}x$,

$\cos x = \sqrt{1-x^2}$, $\operatorname{tg} 2x = x$ — ні.

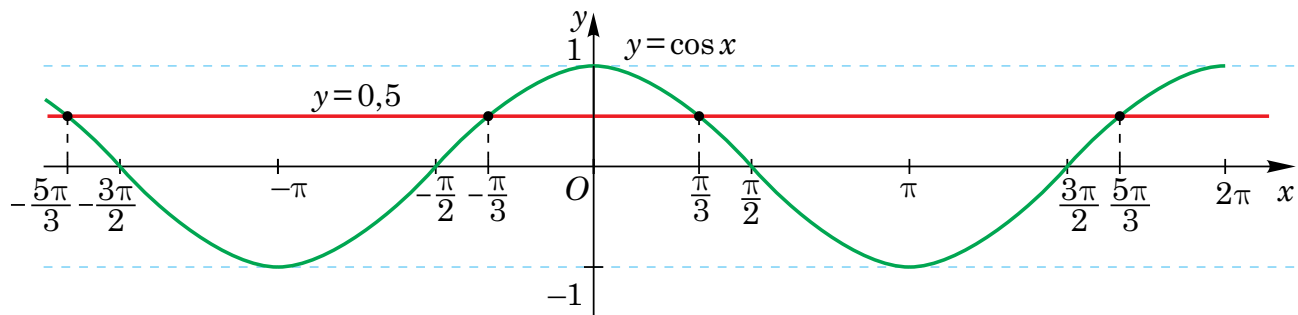
Означення. Коренем, який є кутом, тригонометричного рівняння називається таке числове значення змінної, яке перетворює рівняння у правильну рівність.

Розв'язати тригонометричне рівняння означає знайти всі його корені або довести, що їх не існує.

Найпростішими тригонометричними рівняннями прийнято вважати рівняння виду: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$, де a — довільне дійсне число.

IV. Графічний метод розв'язування рівняння $\cos x = a$ (5 хв)

Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \cos x$ та $y = a$.

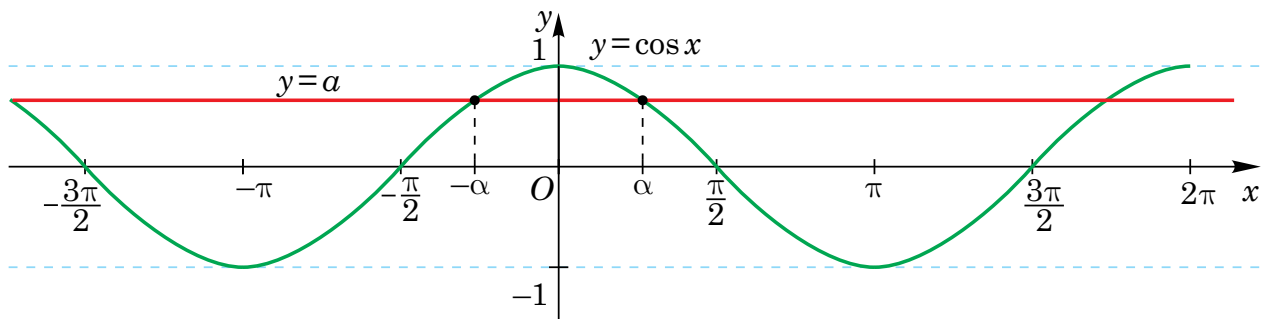


Оскільки множина значень функції $y = \cos x$ є проміжок $[-1; 1]$, то при $a > 1$ і при $a < -1$ рівняння коренів не матиме.

Щоб зрозуміти, як розв'язувати рівняння $\cos x = a$ у загальному випадку, розв'яжемо рівняння $\cos x = 0,5$ графічно (див. рисунок).

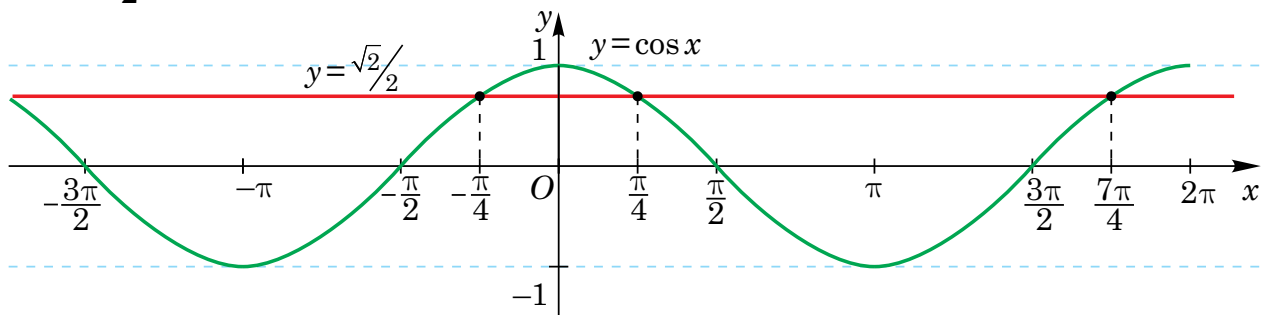
Пряма $y = 0,5$ має з графіком функції $y = \cos x$ нескінченну кількість точок перетину, абсциси яких мають вигляд $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ та $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Якщо число 0,5 замінити на будь-яке інше число з проміжку $(-1; 1)$, то хід розв'язання буде такий самий. Точки перетину графіків мають абсциси: $x = \alpha + 2\pi n$ та $x = -\alpha + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, де α — один з таких кутів, що $\cos \alpha = a$ (див. рисунок).



Приклад 1. Розв'яжіть графічно рівняння $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Розв'язання. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \cos x$ та $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (див. рисунок).



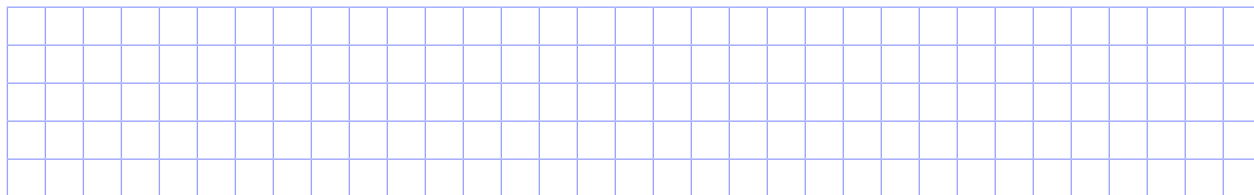
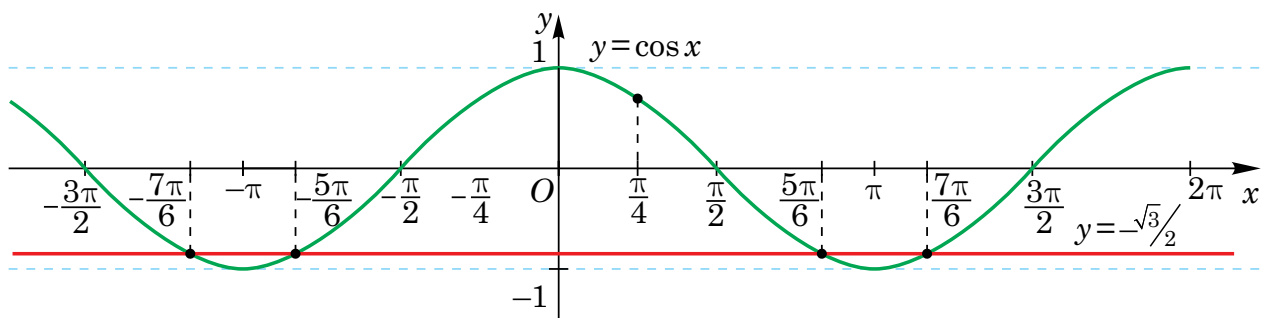
Одним із кутів, косинус якого дорівнює $\frac{\sqrt{2}}{2}$, є кут $\frac{\pi}{4}$, а враховуючи парність функції $y = \cos x$, косинус кута $-\frac{\pi}{4}$ також дорівнює $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Оскільки функція $y = \cos x$ є періодичною з головним періодом 2π , то коренями даного рівняння будуть усі числа виду $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ та $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Приклад 2. Розв'яжіть графічно рівняння $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язання. Використайте рисунок.



V. Особливі випадки при розв'язуванні рівняння $\cos x = a$, якщо $a = 1, a = -1, a = 0$

1) Функція $y = \cos x$ досягає свого найбільшого значення, яке дорівнює 1, у точках виду $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, тому кути $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, є коренями рівняння $\cos x = 1$.

2) Функція $y = \cos x$ досягає свого найменшого значення, яке дорівнює -1 , у точках виду $\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, тому кути $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, є коренями рівняння $\cos x = -1$.

3) Нулями функції $y = \cos x$ є числа виду $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, тому $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, є коренями рівняння $\cos x = 0$.

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $\cos 2x = -1$.

[illegible]

Приклад 4. Розв'яжіть рівняння $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$.

[illegible]

VI. Означення арккосинуса числа a

Означення. Арккосинусом числа a , де $-1 \leq a \leq 1$, називають кут α , де $0 \leq \alpha \leq \pi$, косинус якого дорівнює a , тобто $\cos \alpha = a$.

Основні властивості арккосинуса

- 1.** Для $-1 \leq a \leq 1$ існує єдине значення арккосинуса.
- 2.** Для $|a| > 1$ значень арккосинуса не існує, тобто вирази $\arccos 3$, $\arccos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, $\arccos \pi$, $\arccos(-4)$ не мають змісту.
- 3.** Якщо $-1 \leq a \leq 1$, то $\cos(\arccos a) = a$.
- 4.** $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

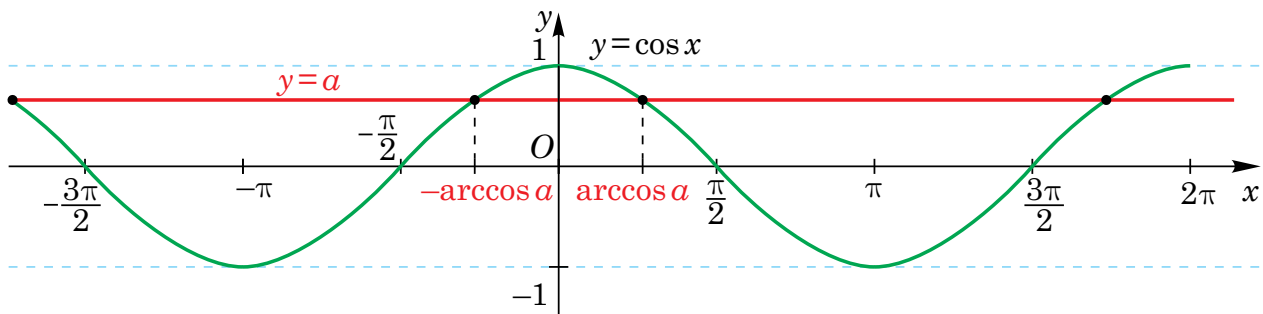
Приклад 5. Обчисліть $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

[illegible]

VII. Загальна формула коренів рівняння $\cos x = a$

Таким чином, формулу коренів рівняння $\cos x = a$, $-1 \leq a \leq 1$, можна записати так:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

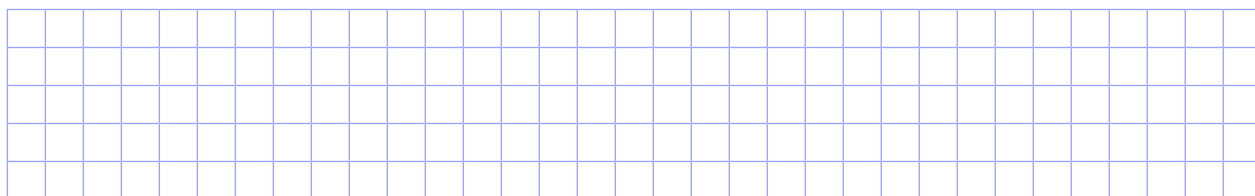


Особливі випадки

$\cos x = 1$	$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Оскільки особливі випадки зустрічаються досить часто, то варто запам'ятати розв'язки кожного з них.

Приклад 6. Розв'яжіть рівняння $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \frac{1}{4}$.



VIII. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Після вимірювання артеріального тиску впродовж доби, за допомогою добового моніторингу артеріального тиску (ДМАТ), лікар увів дані пацієнта в спеціальну програму обробки даних. Програма змодельовала функцію $P = 110 - 20 \cos\left(\frac{16\pi t}{7}\right)$, де час $t > 10$ (в секундах), яка визначає зміну систолічного тиску P пацієнта. Знайдіть найменше значення t ($t > 10$), при якому систолічний тиск P пацієнта дорівнює 100.

Примітка. З'ясуйте, що таке систолічний тиск.

Задача 2. Конкурсна задача. Знайдіть кількість коренів рівняння $\cos x = \frac{11|x|}{20\pi}$. Відповідь обґрунтуйте.

ІХ. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Обчисліть:

$$\begin{array}{lll} 1) \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right); & 2) \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right); & 3) \arccos\left(-\frac{1}{2}\right); \\ 4) \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right); & 5) \arccos 0; & 6) \arccos(-1). \end{array}$$

2. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 2) \cos x = \frac{1}{2}; \quad 3) \cos x = 1; \quad 4) \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 2) \cos x = -\frac{1}{2}; \quad 3) \cos x = -1; \quad 4) \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \cos x = \frac{1}{5}; \quad 2) \cos x = -\frac{1}{7}; \quad 3) \cos x = -1,01; \quad 4) \cos x = \sqrt{2}.$$

5. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \cos 2x = \frac{1}{2}; \quad 2) \cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 3) \cos 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 4) \cos 5x = 0.$$

6. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \cos \frac{x}{3} = \frac{1}{2}; \quad 2) \cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 3) \cos \frac{x}{5} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 4) \cos \frac{x}{3} = 0.$$

Рівень В

1. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 2) \cos\left(\frac{x}{6} + 2\right) = -1; \quad 3) \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 4) 2\cos\left(\frac{\pi}{8} + 3x\right) = 1.$$

2. Укажіть корені рівняння, які належать проміжку $[-2\pi; 2\pi]$:

$$1) 2\cos x = 1; \quad 2) 2\cos x = \sqrt{3}; \quad 3) 2\cos x = -\sqrt{2}; \quad 4) 2\cos x = -1.$$

3. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \cos(2-x) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 2) \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -\frac{1}{2}; \quad 3) \cos(2-3x) = -1; \quad 4) \cos(1-3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \cos \frac{2\pi x}{3} = 0; \quad 2) \cos x = -\frac{1}{7}; \quad 3) \cos x = -1,01; \quad 4) \cos x = \sqrt{2}.$$

5. Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

- 6.** При яких значеннях параметра a рівняння $\cos 2x = -2a^2 + 2a - 1$ має розв'язки?
- 7.** Розв'яжіть рівняння:
- 1) $\cos \frac{2\pi}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos \frac{2\pi}{x^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos \frac{2\pi}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos \sqrt{\frac{\pi}{x}} = 0$.
- 8.** Розв'яжіть рівняння:
- 1) $\cos(2-3x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x = \frac{\pi}{4}$; 3) $\cos \frac{2\pi x}{3} = 0$; 4) $\cos 3x = \sqrt{1,1}$.
- 9.** Розв'яжіть рівняння, за формулами косинуса подвійного аргументу:
- 1) $\cos^2 2x - \sin^2 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $1 - 2\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- 10.** Розв'яжіть рівняння, за формулами косинуса пониження степеня:
- 1) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$; 2) $\sin^2 x = \frac{1}{4}$.
- 11.** Розв'яжіть рівняння:
- 1) $\cos \frac{\pi}{x} = 1$; 2) $\cos 2\pi\sqrt{x} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos(\cos x) = \frac{1}{2}$; 4) $\cos(\cos x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- 12.** Розв'яжіть рівняння:
- 1) $\cos x = -\frac{\pi}{4}$; 2) $\cos x = \frac{\pi}{3}$; 3) $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{4}$; 4) $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Рівень С

- 1.** При яких значеннях параметра a має розв'язки рівняння $(a^2 - 9)\cos x = a + 3$?
- 2.** При яких додатних значеннях параметра a проміжок $[0; a]$ містить не менше трьох коренів рівняння $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$?
- 3.** Розв'яжіть рівняння $\cos \frac{\pi(x^2 + 1)}{x^2 + 11} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- 4.** При яких значеннях параметра a рівняння $\frac{2\cos x + a}{\sqrt{\cos x - 3a + 1}} = 0$ має розв'язки?
- 5.** Визначте кількість коренів рівняння $\cos x = a$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}\right]$ залежно від значень параметра a .
- 6.** При яких значеннях параметра a рівняння $(x - a)\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$ має єдиний корінь на проміжку $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$?
- 7.** Творче завдання. Напишіть програму, яка графічно ілюструє розв'язки рівняння $\cos x = a$.

Рефлексія

- | | | | |
|-----------|--|------------------------|----|
| 1. | Я знаю означення найпростіших тригонометричних рівнянь. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я розумію графічний метод розв'язування рівняння $\cos x = a$. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я знаю формулу для розв'язування рівняння $\cos x = a$, якщо $a = 1$, $a = -1$, $a = 0$. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я знаю означення арккосинуса. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я знаю загальну формулу для розв'язування рівняння $\cos x = a$. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

1. Розв'язування рівнянь $\cos x = a$ за допомогою одиничного кола.
2. Використання рівняння $\cos x = a$ у фізиці.
3. Методи наближеного розв'язування рівняння $\cos x = a$.
4. Використання рівняння $\cos x = a$ у геометрії трикутника.
5. Графічне моделювання розв'язків рівняння $\cos x = a$ у Geogebra або Desmos.







