

Тема 3.

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 10. Рівняння $\operatorname{ctg} x = a$

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

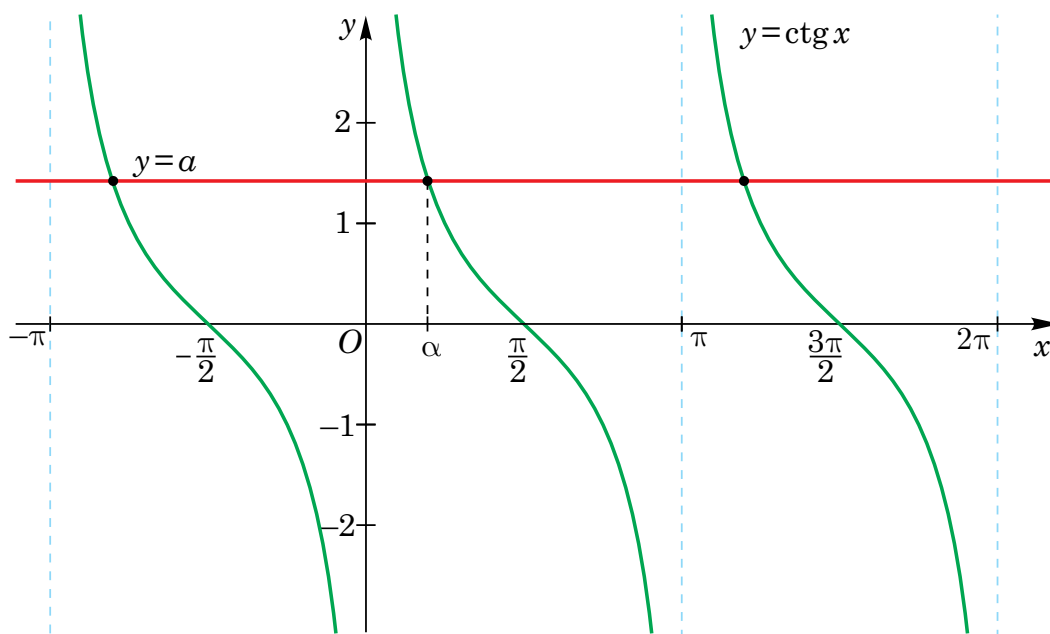
- 1) розглянете графічний метод розв'язування рівняння $\operatorname{ctg} x = a$;
- 2) вивчите означення арккотангенса;
- 3) вивчите загальну формулу коренів рівняння $\operatorname{ctg} x = a$;
- 4) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Розв'яжіть рівняння $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. Розв'яжіть рівняння $\cos \frac{x}{4} = -\frac{1}{2}$.
3. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{5}\right) = \sqrt{3}$.
4. Укажіть найменший додатний кут, котангенс якого дорівнює $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.
5. Скільки коренів має рівняння $\sin \frac{7}{5}x = \sqrt{3} - 1$?

III. Графічний метод розв'язання рівняння $\operatorname{ctg} x = a$

Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \operatorname{ctg} x$ та $y = a$ (див. рисунок).

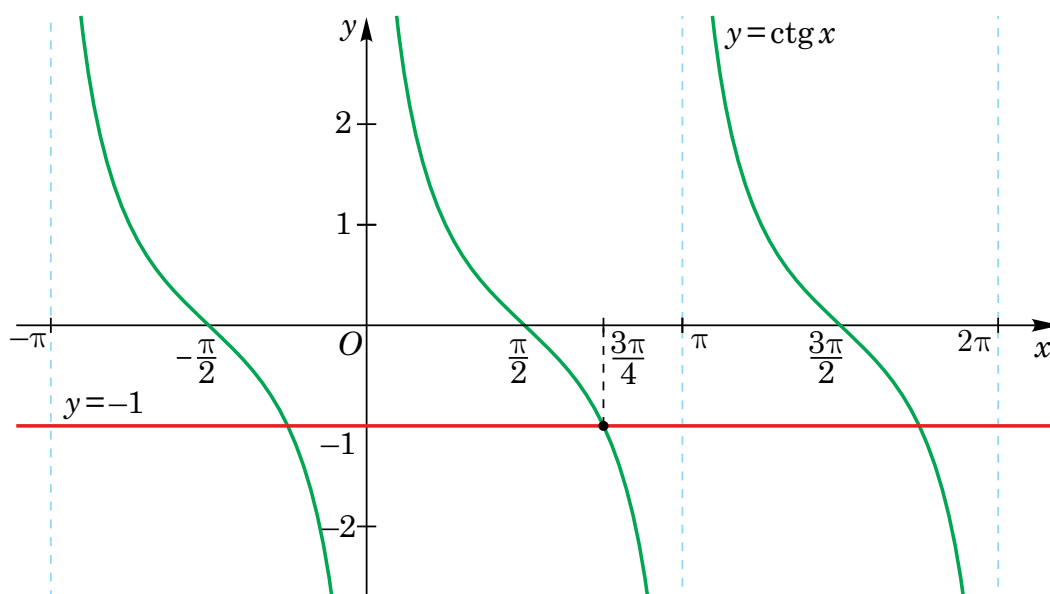


На проміжку $x \in (0; \pi)$ графіки мають єдину точку перетину.

Якщо α — кут, що відповідає цій точці, то враховуючи, що π — головний період котангенса, можна зробити висновок, що усі розв'язки рівняння матимуть вигляд $x = \alpha + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Приклад 1. Розв'яжіть графічно рівняння $\operatorname{ctg} x = -1$.

Розв'язання. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \operatorname{ctg} x$ та $y = -1$ (див. рисунок).



Одним із кутів, котангенс якого дорівнює -1 , є кут $\frac{3\pi}{4}$.

Оскільки функція $y = \operatorname{ctg} x$ є періодичною із головним періодом π , то коренями даного рівняння будуть усі числа вигляду $x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $\frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Приклад 2. Розв'яжіть графічно рівняння $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



IV. Означення арккотангенса числа a

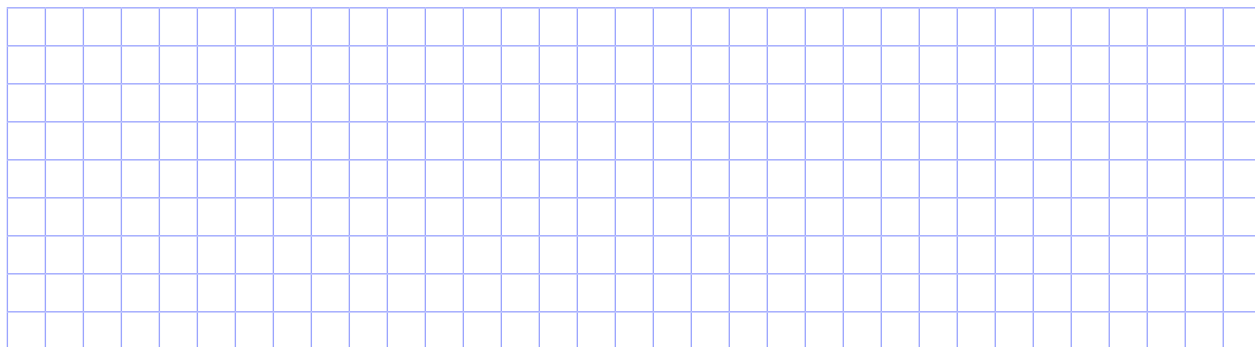
Кут $\alpha \in (0; \pi)$ має спеціальну назву — арккотангенс.

Означення. Арккотангенсом числа a називають такий кут α з проміжку $(0; \pi)$, котангенс якого дорівнює a .

Основні властивості арктангенса

1. Для будь-якого числа a існує єдине значення арккотангенса.
2. Для будь-якого числа a виконується рівність $\operatorname{ctg}(\operatorname{arccotg} a) = a$.
3. $\operatorname{arccotg}(-a) = \pi - \operatorname{arccotg} a$.

Приклад 3. Обчисліть $\operatorname{arccotg} \frac{\sqrt{3}}{3}$.



V. Формула коренів рівняння $\operatorname{ctg} x = a$

Таким чином, розв'язки рівняння $\operatorname{ctg} x = a$ можна записати у такому вигляді:

$$x = \operatorname{arccotg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

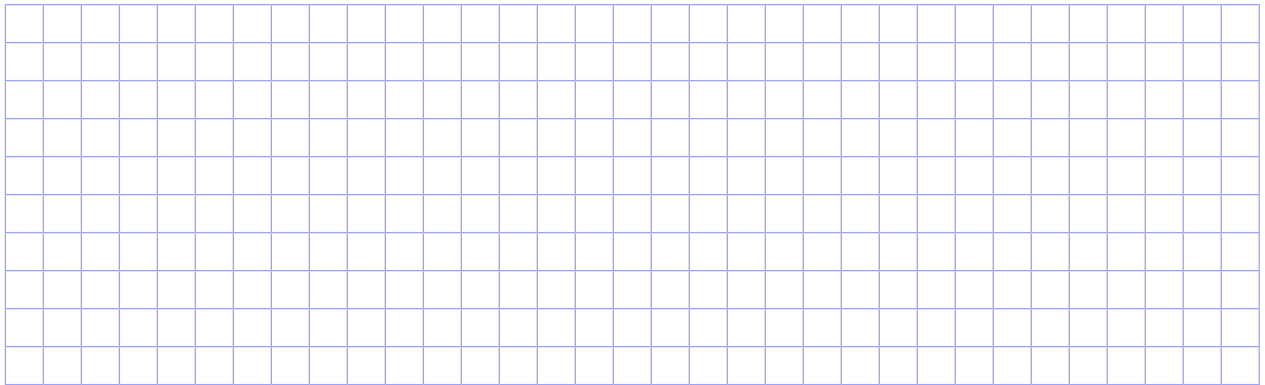
Приклад 4. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{ctg} \frac{x}{3} = 1$.

Розв'язання. $\operatorname{ctg} \frac{x}{3} = 1, n \in \mathbb{Z}, \quad \frac{x}{3} = \operatorname{arccotg} 1 + \pi n, \quad \frac{x}{3} = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$

$$x = \frac{3\pi}{4} + 3\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\frac{3\pi}{4} + 3\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

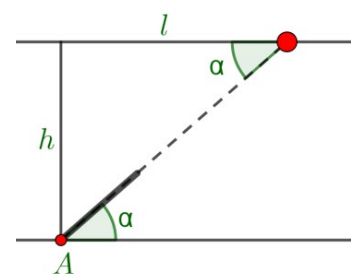
Приклад 5. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{3} - 4x \right) = \sqrt{3}$.



VI. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Розробнику лазерної антидронові автоматичної гармати потрібно визначити кут нахилу гармати до площини поверхні, якщо відомо, що ціль знаходиться на висоті h і на відстані l від гармати (див. рисунок). Визначте кут (у радіанах і в градусах), якщо відомо, що $h = 100$ м, $l = 300$ м.



Задача 2. Конкурсна задача. Розв'яжіть рівняння

$$\left| \operatorname{ctg}^2 2x + 8\sqrt{-\operatorname{ctg} 2x} - 3 \right| = \left| \operatorname{ctg}^2 2x - 8\sqrt{-\operatorname{ctg} 2x} - 3 \right|.$$

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Обчисліть:

1) $\operatorname{arccctg}(-\sqrt{3})$; 2) $\operatorname{arccctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; 3) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arccctg}1)$; 4) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arccctg}\sqrt{3})$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$; 2) $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$; 4) $\operatorname{ctg} x = 1$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{2}$; 2) $\operatorname{ctg} x = 0,2$; 3) $\operatorname{ctg} x = 3$;
4) $\operatorname{ctg} x = -5$; 5) $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{9}$; 6) $\operatorname{ctg} x = 7$.

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg}(2x-1) = -\frac{1}{3}$; 2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}+1\right) = 0,5$; 3) $\operatorname{ctg} 3x = 4$;
4) $\operatorname{ctg} 5x = -5$; 5) $\operatorname{ctg}\left(3x+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{8}$; 6) $\operatorname{ctg}\left(0,1x-\frac{\pi}{3}\right) = 7$.

5. Скільки коренів рівняння $\operatorname{ctg} \frac{x}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$?

6. Знайдіть суму коренів рівняння $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \sqrt{3}$, які належать проміжку $[-2\pi; \pi]$.

Рівень В

1. Обчисліть:

1) $3\operatorname{arccctg}\sqrt{3} - 4\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $2\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arccctg}1$;
3) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{3} + 2\operatorname{arccctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arccctg}(-1)$; 4) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arccctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $2 - \operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$; 2) $1 - \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{7}\right) = 0$;
3) $\operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$; 4) $\operatorname{ctg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$;
5) $6\operatorname{ctg}\left(1 - \frac{x}{4}\right) - 7 = 0$; 6) $5\operatorname{ctg}\left(1 + \frac{x}{3}\right) + 6 = 0$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{\sqrt{x}} = 1$; 2) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{5x} = 1$; 3) $\operatorname{ctg}(\pi \cos x) = \sqrt{3}$; 4) $\operatorname{ctg}(\pi \sin x) = 1$.

4. Знайдіть кількість коренів рівняння, що належать даному проміжку:

1) $\operatorname{ctg} 3x = 3, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];$

2) $\operatorname{ctg} 2x = -2, x \in [0; \pi].$

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $(\sqrt{3} \operatorname{ctg} x + 1)(\operatorname{ctg} x - \sqrt{3}) = 0;$

2) $(\operatorname{ctg} x + 4)\left(\operatorname{ctg} \frac{x}{2} - 1\right) = 0.$

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $(\operatorname{tg} x - 5)(\operatorname{ctg} x + \sqrt{3}) = 0;$

2) $(\operatorname{ctg} x + 3)(\operatorname{tg} x + 1) = 0;$

3) $(\operatorname{ctg} x - \sqrt{3})\left(2 \operatorname{tg} \frac{x}{12} + 1\right) = 0;$

4) $\left(\operatorname{ctg} \frac{x}{6} + 1\right)(\operatorname{tg} x - 1) = 0;$

5) $\left(2 \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1\right)(2 \operatorname{ctg} x + 1) = 0;$

6) $\left(1 - \sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{x}{4}\right)(1 + \sqrt{3} \operatorname{ctg} x) = 0.$

7. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} 3x;$

2) $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} 5x.$

8. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg}^2 x = 3;$

2) $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{3}.$

9. Розв'яжіть рівняння:

1) $3 \operatorname{ctg}(3x + 1) - \sqrt{3} = 0;$

2) $\sqrt{3} \operatorname{ctg}\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) + 3 = 0;$

3) $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{3}x + 2\right) = 0;$

4) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

10. Розв'яжіть рівняння $|\operatorname{ctg} x| = \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x}.$

11. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x = 0;$

2) $\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{ctg} x = 0.$

12. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \operatorname{ctg} 5x;$

2) $\operatorname{tg} 4x = \operatorname{ctg} 5x.$

Рівень С

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg} \frac{\pi x^2}{1+x^2} = 0;$

2) $\operatorname{ctg} \frac{\pi x^2}{1+x^2} = 1.$

2. При яких значеннях параметра a має розв'язки рівняння $\frac{\operatorname{ctg} x - a}{\operatorname{tg} x + 2} = 0?$

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg}(0,5x) \cdot \sqrt{16 - 9x^2} = 0;$

2) $\operatorname{ctg}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sqrt{1 - |x|} = 0.$

4. При яких значеннях параметра a рівняння $(x + a)(\operatorname{ctg} x - \sqrt{3}) = 0$ на проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ має єдиний корінь?

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg}(3\operatorname{tg} 2\pi x) = -1$;

2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}\cos 2\pi x\right) = \sqrt{3}$.

6. При яких додатних значеннях параметра a проміжок $\left[-\frac{\pi}{2}; a\right]$ містить не менше

чотирьох коренів рівняння $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$?

7. Творче завдання. Створіть за допомогою Geogebra або Desmos графічну ілюстрацію розв'язків рівняння $\operatorname{ctg} x = a$.

Рефлексія

1) На уроці я дізнався/дізналася

.....

2) Мені найбільше запам'яталося

.....

3) Для мене було найцікавішим

.....

4) Для мене було найскладнішим

.....

5) Я припустився/припустилася помилки

.....

6) Я хочу повторити, аби краще зрозуміти

.....

7) Поради собі до наступного уроку

.....

Можливі теми проєктів

1. Застосування рівнянь $\operatorname{ctg} x = a$ для визначення кутів нахилу поверхонь.
2. Математичне моделювання процесів спостереження за об'єктами під різними кутами за допомогою рівняння $\operatorname{ctg} x = a$.
3. Порівняння використання рівнянь виду $\operatorname{ctg} x = a$ і $\operatorname{tg} x = a$ у прикладних задачах.
4. Вимірювання висоти об'єктів за допомогою смартфона і рівняння $\operatorname{ctg} x = a$.
5. Застосування рівняння $\operatorname{ctg} x = a$ у проектуванні освітлення.







