

Тема 3.

Тригонометричні рівняння й нерівності

Урок 10. Рівняння $\operatorname{ctg} x = a$

Тип уроку: урок засвоєння нових знань.

План уроку

1. Графічний метод розв'язання рівняння $\operatorname{ctg} x = a$.
2. Означення арккотангенса числа a як кореня рівняння $\operatorname{ctg} x = a$.
3. Формула коренів рівняння $\operatorname{ctg} x = a$.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

виявляє ініціативу, пропонує та обґрунтовує ідеї щодо способу розв'язання специфічних проблемних ситуацій [12 МАО 2.2.1–1 П];

визначає, яких даних недостатньо чи є надлишкові дані, під час розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2–1 П];

використовує різні форми подання математичних об'єктів відповідно до специфіки проблемної ситуації [12 МАО 4.2.2–2 П];

використовує математичні поняття, факти і процедури, пояснює їхнє застосування, наводить аргументи [12 МАО 4.3.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.

6) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівень В або рівень С.

10) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Чи можна знаходити кут підйому сонця за довжиною тіні від предмета?
- 2) За допомогою яких тригонометричних функцій можна визначити кут нахилу дороги?
- 3) Чи може рівняння $\operatorname{ctg} x = a$ бути корисним в астрономії?
- 4) У яких випадках зручно користуватися саме котангенсом, а не тангенсом?
- 5) Якщо $\operatorname{ctg} x = a$, то що станеться з кутом x , якщо число a збільшувати?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Розв'яжіть рівняння $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Відповідь. $(-1)^k \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

2. Розв'яжіть рівняння $\cos \frac{x}{4} = -\frac{1}{2}$.

Відповідь. $\pm \frac{8\pi}{3} + 8\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

3. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{5}\right) = \sqrt{3}$.

Відповідь. $-\frac{5\pi}{3} + 5\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

4. Укажіть найменший додатний кут, котангенс якого дорівнює $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

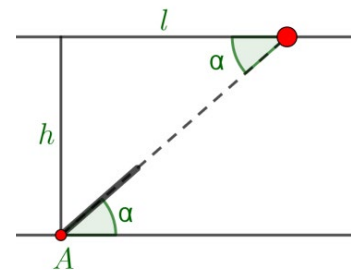
Відповідь. $\frac{2\pi}{3}$.

5. Скільки коренів має рівняння $\sin \frac{7}{5}x = \sqrt{3} - 1$?

Відповідь. Безліч.

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Розробнику лазерної антидронові автоматичної гармати потрібно визначити кут нахилу гармати до площини поверхні, якщо відомо, що ціль знаходиться на висоті h і на відстані l від гармати (див. рисунок). Визначте кут (у радіанах і в градусах), якщо відомо, що $h = 100$ м, $l = 300$ м.

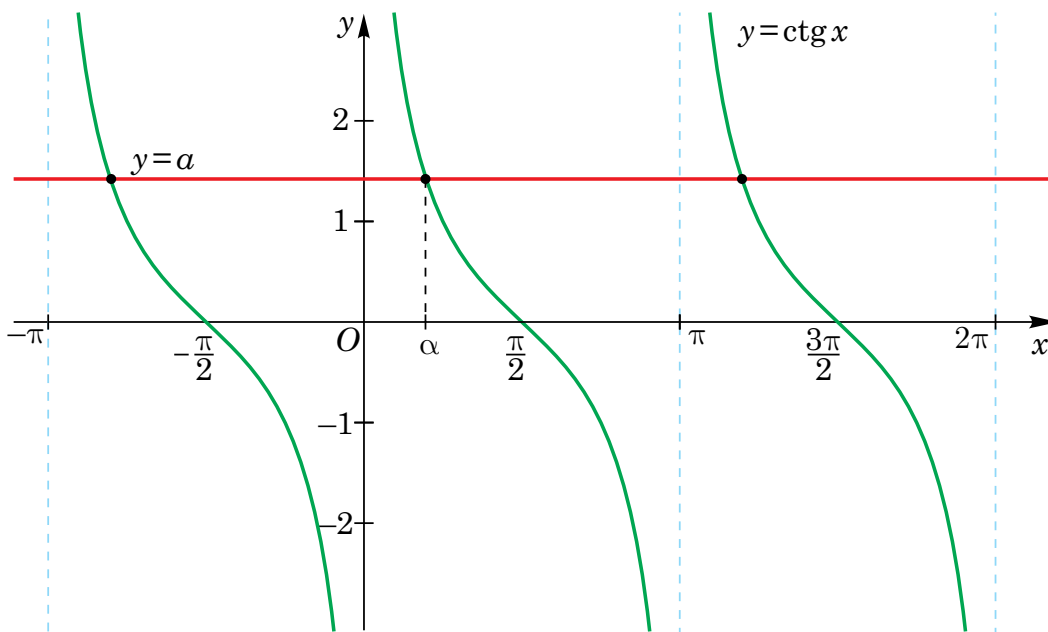


Задача 2. Конкурсна задача. Розв'яжіть рівняння

$$|\operatorname{ctg}^2 2x + 8\sqrt{-\operatorname{ctg} 2x} - 3| = |\operatorname{ctg}^2 2x - 8\sqrt{-\operatorname{ctg} 2x} - 3|.$$

III. Графічний метод розв'язання рівняння $\operatorname{ctg} x = a$

Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \operatorname{ctg} x$ та $y = a$ (див. рисунок).



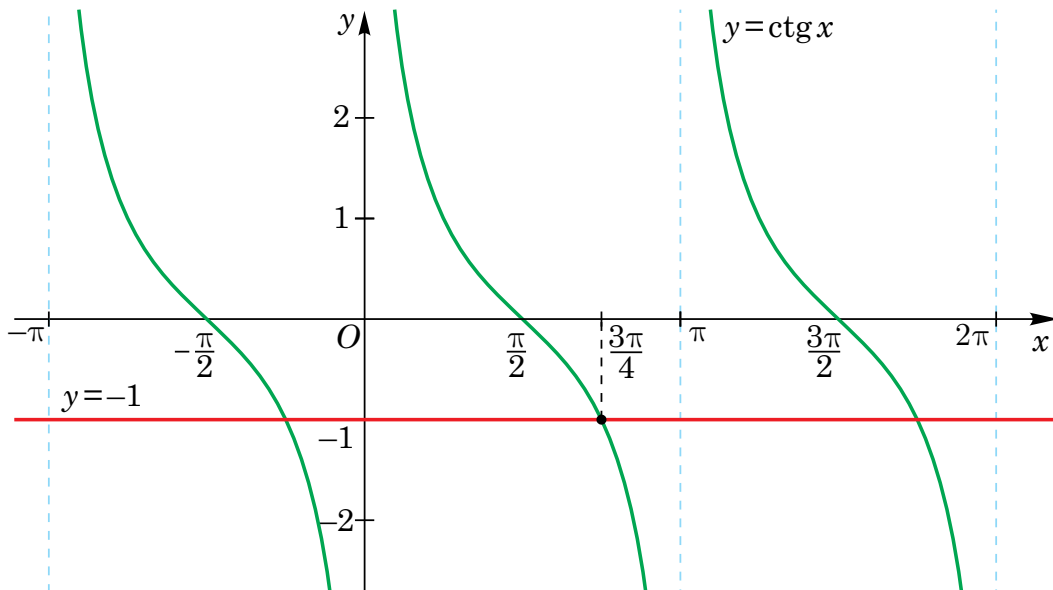
На проміжку $x \in (0; \pi)$ графіки мають єдину точку перетину.

Якщо α — кут, що відповідає цій точці, то враховуючи, що π — головний період котангенса, можна зробити висновок, що усі розв'язки рівняння матимуть вигляд $x = \alpha + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ілюстративні приклади

6. Розв'яжіть графічно рівняння $\operatorname{ctg} x = -1$.

Розв'язання. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \operatorname{ctg} x$ та $y = -1$ (див. рисунок).



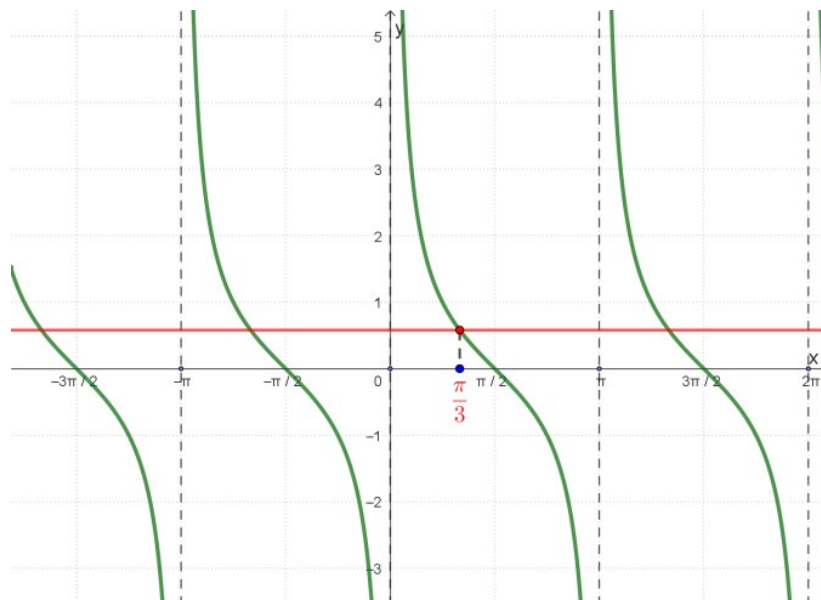
Одним із кутів, котангенс якого дорівнює -1 , є кут $\frac{3\pi}{4}$.

Оскільки функція $y = \operatorname{ctg} x$ є періодичною із головним періодом π , то коренями даного рівняння будуть усі числа вигляду $x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $\frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

7. Розв'яжіть графічно рівняння $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Розв'язання. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \operatorname{ctg} x$ та $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (див. рисунок).



Одним із кутів, котангенс якого дорівнює $\frac{\sqrt{3}}{3}$ є кут $\frac{\pi}{3}$. Оскільки функція $y = \operatorname{ctg} x$ є періодичною із головним періодом π , то коренями даного рівняння будуть усі числа виду $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

IV. Означення арккотангенса числа a

Кут $\alpha \in (0; \pi)$ має спеціальну назву — арккотангенс.

Означення. Арккотангенсом числа a називають такий кут α з проміжку $(0; \pi)$, котангенс якого дорівнює a .

Основні властивості арктангенса

1. Для будь-якого числа a існує єдине значення арккотангенса.
2. Для будь-якого числа a виконується рівність $\operatorname{ctg}(\operatorname{arccctg} a) = a$.
3. $\operatorname{arccctg}(-a) = \pi - \operatorname{arccctg} a$.

Ілюстративні приклади

8. Обчисліть $\operatorname{arccctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Розв'язання. $\operatorname{arccctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}$, оскільки $0 < \frac{\pi}{3} < \pi$ і $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Відповідь. $\frac{\pi}{3}$.

9. Обчисліть $\operatorname{arccctg}(-\sqrt{3})$.

Розв'язання. $\operatorname{arccctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \operatorname{arccctg} \sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$,

оскільки $0 < \frac{5\pi}{6} < \pi$ і $\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$.

Відповідь. $\frac{5\pi}{6}$.

10. Чи є правильною рівність $\operatorname{arccctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{6}$.

Розв'язання. Хоча $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$, проте $-\frac{\pi}{6} \notin (0; \pi)$, тому рівність

$\operatorname{arccctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{6}$ — неправильна.

Відповідь. Ні.

V. Формула коренів рівняння $\operatorname{ctg} x = a$

Таким чином, розв'язки рівняння $\operatorname{ctg} x = a$ можна записати у такому вигляді:

$$x = \operatorname{arccotg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ілюстративні приклади

- 11.** Розв'яжіть рівняння $\operatorname{ctg} \frac{x}{3} = 1$.

Розв'язання. $\operatorname{ctg} \frac{x}{3} = 1, n \in \mathbb{Z}, \quad \frac{x}{3} = \operatorname{arccotg} 1 + \pi n, \quad \frac{x}{3} = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$

$$x = \frac{3\pi}{4} + 3\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\frac{3\pi}{4} + 3\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

- 12.** Розв'яжіть рівняння $\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{3} - 4x \right) = \sqrt{3}$.

Розв'язання. Оскільки функція $f(x) = \operatorname{ctg} x$ непарна, то: $\operatorname{ctg} \left(4x - \frac{\pi}{3} \right) = -\sqrt{3},$

$$4x - \frac{\pi}{3} = \operatorname{arccotg}(-\sqrt{3}) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad 4x - \frac{\pi}{3} = \pi - \operatorname{arccotg} \sqrt{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$4x - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad 4x = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$4x = \frac{7\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\frac{7\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

- 13.** Розв'яжіть рівняння $\operatorname{ctg} \left(\frac{x}{2} - 1 \right) = 2$.

Розв'язання. $\operatorname{ctg} \left(\frac{x}{2} - 1 \right) = 2, \quad \frac{x}{2} - 1 = \operatorname{arccotg} 2 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$

$$\frac{x}{2} = 1 + \operatorname{arccotg} 2 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = 2 + 2\operatorname{arccotg} 2 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $2 + 2\operatorname{arccotg} 2 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

- 14.** Розв'яжіть рівняння $\operatorname{ctg} \left(\frac{2\pi}{3} - x \right) = -1$.

Розв'язання. Оскільки функція $f(x) = \operatorname{ctg} x$ — непарна, то:

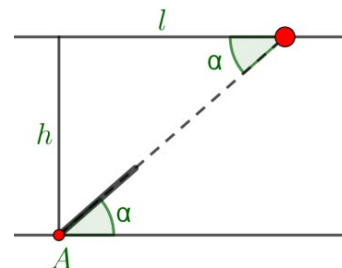
$$\operatorname{ctg} \left(x - \frac{2\pi}{3} \right) = 1, \quad x - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{11\pi}{12} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\frac{11\pi}{12} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Розробнику лазерної антидронові автоматичної гармати потрібно визначити кут нахилу гармати до площини поверхні, якщо відомо, що ціль знаходиться на висоті h і на відстані l від гармати (див. рисунок). Визначте кут (у радіанах і в градусах), якщо відомо, що $h = 100$ м, $l = 300$ м.



Розв'язання. За тригонометричними співвідношеннями у прямокутному трикут-

нику: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{l}{h}$, звідки
$$\begin{cases} \alpha = \operatorname{arccctg} \frac{l}{h} + \pi n, \\ \alpha = \left(\pi - \operatorname{arccctg} \frac{l}{h} \right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad \text{де } 0 < \alpha < \pi.$$

Якщо $h = 100$ м, $l = 300$ м, то
$$\begin{cases} \alpha = \operatorname{arccctg} 3, \\ \alpha = \pi - \operatorname{arccctg} 3. \end{cases}$$

Отже, $\alpha \approx 0,32$ або $\alpha \approx 2,82$, що у градусах становить $18,5^\circ$ або $161,5^\circ$.

Відповідь. $0,32$ або $2,82$; $18,5^\circ$ або $161,5^\circ$.

Задача 2. Конкурсна задача. Розв'яжіть рівняння

$$\left| \operatorname{ctg}^2 2x + 8\sqrt{-\operatorname{ctg} 2x} - 3 \right| = \left| \operatorname{ctg}^2 2x - 8\sqrt{-\operatorname{ctg} 2x} - 3 \right|.$$

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} 2x \leq 0, \\ \left[\begin{aligned} \operatorname{ctg}^2 2x + 8\sqrt{-\operatorname{ctg} 2x} - 3 &= \operatorname{ctg}^2 2x - 8\sqrt{-\operatorname{ctg} 2x} - 3, \\ \operatorname{ctg}^2 2x + 8\sqrt{-\operatorname{ctg} 2x} - 3 &= -(\operatorname{ctg}^2 2x - 8\sqrt{-\operatorname{ctg} 2x} - 3); \end{aligned} \right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} 2x \leq 0, \\ \left[\begin{aligned} 16\sqrt{-\operatorname{ctg} 2x} &= 0, \\ 2\operatorname{ctg}^2 2x - 6 &= 0; \end{aligned} \right. \left[\begin{aligned} \operatorname{ctg} 2x &= 0, \\ \operatorname{ctg} 2x &= -\sqrt{3}; \end{aligned} \right. \left[\begin{aligned} 2x &= \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ 2x &= \frac{5\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{aligned} \right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

Відповідь. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, n, k \in \mathbb{Z}.$

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Обчисліть:

1) $\operatorname{arccctg}(-\sqrt{3})$; 2) $\operatorname{arccctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. 3) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arccctg}1)$; 4) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arccctg}\sqrt{3})$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$; 2) $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$; 4) $\operatorname{ctg} x = 1$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{2}$; 2) $\operatorname{ctg} x = 0,2$; 3) $\operatorname{ctg} x = 3$;
4) $\operatorname{ctg} x = -5$; 5) $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{9}$; 6) $\operatorname{ctg} x = 7$.

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg}(2x-1) = -\frac{1}{3}$; 2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}+1\right) = 0,5$; 3) $\operatorname{ctg} 3x = 4$;
4) $\operatorname{ctg} 5x = -5$; 5) $\operatorname{ctg}\left(3x+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{8}$; 6) $\operatorname{ctg}\left(0,1x-\frac{\pi}{3}\right) = 7$.

5. Скільки коренів рівняння $\operatorname{ctg} \frac{x}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$?

6. Знайдіть суму коренів рівняння $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \sqrt{3}$, які належать проміжку $[-2\pi; \pi]$.

Рівень В

1. Обчисліть:

1) $3\operatorname{arccctg}\sqrt{3} - 4\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $2\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arccctg}1$;
3) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{3} + 2\operatorname{arccctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arccctg}(-1)$; 4) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arccctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $2 - \operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$; 2) $1 - \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{7}\right) = 0$;
3) $\operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$; 4) $\operatorname{ctg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$;
5) $6\operatorname{ctg}\left(1 - \frac{x}{4}\right) - 7 = 0$; 6) $5\operatorname{ctg}\left(1 + \frac{x}{3}\right) + 6 = 0$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{\sqrt{x}} = 1$; 2) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{5x} = 1$; 3) $\operatorname{ctg}(\pi \cos x) = \sqrt{3}$; 4) $\operatorname{ctg}(\pi \sin x) = 1$.

4. Знайдіть кількість коренів рівняння, що належать даному проміжку:

1) $\operatorname{ctg} 3x = 3, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];$

2) $\operatorname{ctg} 2x = -2, x \in [0; \pi].$

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $(\sqrt{3} \operatorname{ctg} x + 1)(\operatorname{ctg} x - \sqrt{3}) = 0;$

2) $(\operatorname{ctg} x + 4)\left(\operatorname{ctg} \frac{x}{2} - 1\right) = 0.$

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $(\operatorname{tg} x - 5)(\operatorname{ctg} x + \sqrt{3}) = 0;$

2) $(\operatorname{ctg} x + 3)(\operatorname{tg} x + 1) = 0;$

3) $(\operatorname{ctg} x - \sqrt{3})\left(2 \operatorname{tg} \frac{x}{12} + 1\right) = 0;$

4) $\left(\operatorname{ctg} \frac{x}{6} + 1\right)(\operatorname{tg} x - 1) = 0;$

5) $\left(2 \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1\right)(2 \operatorname{ctg} x + 1) = 0;$

6) $\left(1 - \sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{x}{4}\right)(1 + \sqrt{3} \operatorname{ctg} x) = 0.$

7. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} 3x;$

2) $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} 5x.$

8. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg}^2 x = 3;$

2) $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{3}.$

9. Розв'яжіть рівняння:

1) $3 \operatorname{ctg}(3x + 1) - \sqrt{3} = 0;$

2) $\sqrt{3} \operatorname{ctg}\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) + 3 = 0;$

3) $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{3}x + 2\right) = 0;$

4) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

10. Розв'яжіть рівняння $|\operatorname{ctg} x| = \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x}.$

11. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x = 0;$

2) $\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{ctg} x = 0.$

12. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \operatorname{ctg} 5x;$

2) $\operatorname{tg} 4x = \operatorname{ctg} 5x.$

Рівень С

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg} \frac{\pi x^2}{1+x^2} = 0;$

2) $\operatorname{ctg} \frac{\pi x^2}{1+x^2} = 1.$

2. При яких значеннях параметра a має розв'язки рівняння $\frac{\operatorname{ctg} x - a}{\operatorname{tg} x + 2} = 0?$

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg}(0,5x) \cdot \sqrt{16 - 9x^2} = 0;$

2) $\operatorname{ctg}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sqrt{1 - |x|} = 0.$

4. При яких значеннях параметра a рівняння $(x + a)(\operatorname{ctg} x - \sqrt{3}) = 0$ на проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ має єдиний корінь?

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg}(3\operatorname{tg} 2\pi x) = -1$;

2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}\cos 2\pi x\right) = \sqrt{3}$.

6. При яких додатних значеннях параметра a проміжок $\left[-\frac{\pi}{2}; a\right]$ містить не менше

чотирьох коренів рівняння $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$?

7. Творче завдання. Створіть за допомогою Geogebra або Desmos графічну ілюстрацію розв'язків рівняння $\operatorname{ctg} x = a$.

VIII. Рефлексія (2 хв)

1) На уроці я дізнався/дізналася

.....

2) Мені найбільше запам'яталося

.....

3) Для мене було найцікавішим

.....

4) Для мене було найскладнішим

.....

5) Я припустився/припустилася помилки

.....

6) Я хочу повторити, аби краще зрозуміти

.....

7) Поради собі до наступного уроку

.....

Можливі теми проєктів

1. Застосування рівнянь $\operatorname{ctg} x = a$ для визначення кутів нахилу поверхонь.
2. Математичне моделювання процесів спостереження за об'єктами під різними кутами за допомогою рівняння $\operatorname{ctg} x = a$.
3. Порівняння використання рівнянь виду $\operatorname{ctg} x = a$ і $\operatorname{tg} x = a$ у прикладних задачах.
4. Вимірювання висоти об'єктів за допомогою смартфона і рівняння $\operatorname{ctg} x = a$.
5. Застосування рівняння $\operatorname{ctg} x = a$ у проектуванні освітлення.